UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Decanato de Estudios de Postgrado
Especialización en Didáctica de las Matemáticas en Educación Media

EXPERIENCIA DE INNOVACIÓN DIDÁCTICA EN ÁLGEBRA: UNA UNIDAD DIDÁCTICA SOBRE FUNCIÓN AFÍN

Trabajo Especial de Grado presentado a la Universidad Simón Bolívar
por

Marta García Valldecabres

Como requisito parcial para optar al grado de
Especialista en Didáctica de las Matemáticas en Educación Media

Realizado con la tutoría del Profesor Enrique Planchart

Marzo, 2006

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Decanato de Estudios de Postgrado
Especialización en Didáctica de las Matemáticas en Educación Media

EXPERIENCIA DE INNOVACIÓN DIDÁCTICA EN ÁLGEBRA: UNA UNIDAD DIDÁCTICA SOBRE FUNCIÓN AFÍN

Este trabajo Especial de Grado ha sido aprobado en nombre de la Universidad Simón Bolívar por el siguiente jurado examinador:

Profesores: Sabrina Garbín y Eduardo Lima
Jurado

Profesor Enrique Planchart
Tutor

4 de mayo del 2006

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Decanato de Estudios de Postgrado
Especialización en Didáctica de las Matemáticas en Educación Media

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

EXPERIENCIA DE INNOVACIÓN DIDÁCTICA EN ÁLGEBRA: UNA UNIDAD DIDÁCTICA SOBRE FUNCIÓN AFÍN

por

Marta García Valldecabres

Marzo, 2006

A mis padres
y a los profesores que deseen emprender
el reto de transmitir una matemática de calidad

AGRADECIMIENTOS

Con agradecimiento a todos los profesores y compañeros de la *Especialización en Didáctica de las Matemáticas en Educación Media* (USB), por el apoyo prestado a lo largo de los dos años de estudio. De modo especial al Profesor Enrique Planchart, quien con su paciencia, perseverancia y generosa dedicación ha hecho realidad el proyecto de transmitir una Matemática de calidad a través de la formación de profesores en el área.

Y por supuesto, gracias a los alumnos que se empeñaron en aprender el tema función afín mediante los lineamientos de la Unidad Didáctica diseñada; y a todas aquellas personas que colaboraron en la finalización de este trabajo de investigación.

RESUMEN

El trabajo que se presenta es una *investigación acción sobre los efectos producidos en profesores de matemática y alumnos después de utilizar un material de innovación curricular de álgebra.* La innovación didáctica consistió en el diseño, validación y aplicación de una Unidad Didáctica sobre el tema de función afín del contenido curricular matemático de 9º grado de Básica III en Venezuela.

Las *bases teóricas del estudio* pueden sintetizarse en el aprendizaje significativo de Ausubel dentro de un contexto de epistemología constructivista; y en las directrices de Rico, Callejo y otros autores sobre la metodología para elaborar Unidades Didácticas de matemática de secundaria.

La *metodología de investigación tuvo dos fases*, la primera, el diseño y aplicación de la Unidad Didáctica a siete grupos de estudiantes de liceos, tanto públicos como privados; y la segunda, reflexión sobre las diversas experiencias, rediseño del documento y aplicación a otros dos grupos, después de considerar los aportes de cada profesor.

La *riqueza de los resultados* obtenidos radicó en el esfuerzo de reflexión sobre la experiencia innovadora de didáctica del álgebra. Los resultados influenciaron en: el desarrollo curricular mediante Unidades Didácticas; la evaluación en matemáticas al servicio del aprendizaje; el aprendizaje significativo constructivista; competencias matemáticas en los alumnos; mejoramiento profesional del docente; calidad de los contenidos del álgebra escolar; rol de los participantes del proceso educativo; y diversidad de metodologías en el aula.

El *impacto de este trabajo de investigación* interpretativo cualitativa, va más allá de las experiencias de los participantes involucrados, ya que muchos de los resultados son transferibles a otras áreas y contextos educativos. Por ejemplo, una metodología para el diseño de materiales innovadores; un modelo de la investigación acción como mejoramiento profesional del docente; y una optimización de los materiales didácticos.

Palabras claves: Innovación curricular. Diseño Unidad Didáctica. Función afín. Aprendizaje significativo. Permanente formación profesorado.

ÍNDICE GENERAL

ABREVIATURAS

Coord.	Coordinador
Ibid.	El mismo
ICE	Institut de Ciències de l´Educació. Universitat de Barcelona.
ICME	Instituto de Ciencias de la Educación Matemática
I.E.P.S.	Instituto de Estudios Pedagógicos Somosaguas
M.D.	Media Diversificada
M.E.	Ministerio de Educación
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
Op. cit.	Obra citada
RELME	Reunión Latinoamericana de Enseñanza Matemática
SAEM	Sociedad Andaluza de Educadores de Matemáticas
UCAB	Universidad Católica Andrés Bello
USB	Universidad Simón Bolívar

INTRODUCCIÓN

La enseñanza matemática en nuestro país es un *proceso complejo* en el que aparecen muchas variables. El proceso de transposición didáctica finaliza con el trabajo del profesor en el aula, por lo que éste debe conocer muy bien el objeto a enseñar, así como presentar el objeto matemático con una secuencia que permita ser asimilado fácilmente por los alumnos.

Las principales *características del saber a enseñar* para que el proceso de enseñanza y aprendizaje sea eficaz y de calidad son, en primer lugar, la real *programabilidad* del contenido curricular, y, en segundo lugar, la real *aplicabilidad* de la secuencia y metodologías utilizadas para transmitir un contenido matemático.

La mejora de la calidad del proceso de enseñanza y aprendizaje puede realizarse a través de la *elaboración de materiales didácticos bien pensados* que tengan una secuencia agradable, con ejemplos bien elegidos, conexiones significativas entre los diversos conceptos y una presentación del contenido profunda y sencilla. Estos materiales innovadores pueden ser de gran ayuda para el docente venezolano: un ejemplo es de ello es el documento recién diseñado sobre función afín y su uso durante el curso escolar 2004-2005.

Esta investigación concluye con la presentación de una *Unidad Didáctica sobre función afín* elaborada a partir de las *experiencias de docentes venezolanos* en ejercicio y del gran *esfuerzo de reflexión de la autora* de este escrito. Ese documento se basa en valiosos y recientes descubrimientos de la ciencia Didáctica de la Matemática, por tanto, puede ser de interés a profesores de aula que desean participar en un proceso de enseñanza y aprendizaje de calidad sobre el tema de función afín.

La mejora de la calidad de la enseñanza será cada vez una realidad más cercana si, por una parte, los profesores de matemática en ejercicio tiene mayor *disponibilidad de Unidades Didácticas elaboradas por los propios docentes* venezolanos, y por otra, si éstas se basan, tanto en su experiencia como en los aportes de las investigaciones en educación matemática (en este caso, concretamente, en las innovaciones sobre el álgebra escolar).

La *perspectiva del proceso de enseñanza y aprendizaje significativo* constituyó un aporte en la elaboración del documento, porque se tomaron en cuenta los conocimientos previos, los nuevos conocimientos estructurados de forma cognitivo–integradora, y el desarrollo de las competencias matemática del alumno.

El objetivo general de esta investigación consistió *en la propuesta concreta de una Unidad Didáctica sobre función afín* –innovadora y aplicable– basada en la teoría constructivista de un aprendizaje significativo para los alumnos, que pueda ser utilizada fácilmente por el docente venezolano al transmitir dicho contenido curricular a estudiantes de 9º grado de Educación Básica III.

Como indica la secuencia de este trabajo, se comenzó con el planteamiento del problema, su justificación y los objetivos de la investigación (Capítulo 1), se siguió con un amplio marco teórico sobre el diseño de Unidades Didácticas en la matemática de secundaria (Capítulo 2), se continuó con la explicación de la metodología de la investigación (Capítulo 3), y, finalmente, se analizaron los resultados (Capítulo 4).

Después del acercamiento al contenido del Capítulo 1 de este trabajo de investigación y antes de pasar a los Capítulos 2, 3 y 4, se aconseja que el estudioso del tema haga una lectura atenta del ANEXO 1, *Una Unidad Didáctica sobre función afín. Así, s*acará mayor provecho de esta experiencia pedagógica, porque las referencias a ese anexo son constantes a lo largo del texto escrito.

CAPÍTULO 1: EL PROBLEMA DIDÁCTICO

1.1. Planteamiento del problema

En las dos últimas décadas, la *enseñanza y el aprendizaje del álgebra* ha sido un tema destacado en las investigaciones científicas. A través de ellas se han puesto de manifiesto algunas dificultades que tienen los estudiantes de los distintos niveles respecto a los conceptos algebraicos, y también, se han propuesto estrategias de acción para hacer más significativo el aprendizaje del álgebra.

La *transposición didáctica* designa el conjunto de transformaciones que sufre un saber científico con el fin de ser enseñando. La Didáctica de la matemática, a través de la transposición didáctica, se interesa en el estudio de todo el complejo sistema de adaptaciones y restricciones que debe sufrir un saber formalizado científicamente hasta llegar a convertirse en un saber adaptado a la enseñanza escolar.

El *trabajo del profesor en el aula* configura la última etapa del proceso de transposición didáctica. El profesor debe conocer muy bien el objeto del saber matemático correspondiente, y por otra parte, debe presentar el conocimiento con una secuencia que permita ser asimilado fácilmente por los alumnos. Por ello, debe tener una hipótesis de cómo se realiza el aprendizaje, la cual regule de forma implícita las condiciones y restricciones del contrato didáctico.

Las principales *características del saber a enseñar* para que el proceso de enseñanza y aprendizaje sea eficaz y de calidad se pueden catalogar de la siguiente manera:

- en primer lugar, una real *programabilidad* del contenido curricular, es decir, ha de existir un inicio claro y una secuencia de actividades que se engarcen entre sí para facilitar el proceso;

- y, en segundo lugar, una real *aplicabilidad* de la secuencia y metodologías a emplear para transmitir un contenido matemático presentado en las diversas Unidades Didácticas, es decir, se trata de la organización del conocimiento adaptada a las necesidades de los docentes y del alumnado.

Además, en investigaciones recientes, se han detectado los siguientes *fenómenos didácticos:*

- la enseñanza matemática en nuestro país es un *proceso complejo* en el que aparecen muchas variables;
- los profesores de matemática de educación secundaria han de atender *múltiples y variados aspectos de su profesión*: la planificación y preparación de las clases, las abundantes correcciones, los problemas académicos o de disciplina con estudiantes o salones completos;
- hay un gran *desfase entre el tiempo dedicado* por los profesores de matemática *a horas de clase en aula*, y *el que utiliza en otros trabajos* docentes;
- también se observa un *desfase entre número de horas* académicas de matemáticas aprobadas oficialmente para los diversos niveles de secundaria *y la cantidad de temas* a enseñar en cada nivel;
- se nota una falta de conciencia en los directivos acerca de la dificultad que supone *la gran cantidad de alumnos en cada salón*, para lograr una enseñanza de calidad en matemática;
- también se percibe una falta de preocupación del propio docente, y de los organismos de los que depende, respecto a la *formación del profesor de matemática,* así como de la importancia de esta asignatura para el futuro empeño laboral;
- la realidad de que los pocos investigadores en Didáctica de matemática en Venezuela – así como de otros países- tienen un trabajo menos agitado respecto al día a día de los profesores, y de que los *excelentes resultados de sus investigaciones* todavía no son accesibles ni están disponibles a la gran mayoría de los docentes de aula;
- el *deterioro en la forma de impartir los temas de álgebra* en las últimas décadas, específicamente, el de función afín;

- las *pocas innovaciones de calidad* en la clase de matemáticas, tomando como referencia las lecciones tradicionales de hace varias décadas;
- el evidente estilo de enseñanza del álgebra con marcadas *tendencias algorítmicas y memorísticas*, sin una conexión integradora del saber del alumno, y, muy lejano de su realidad cotidiana y de su contexto socio-cultural;
- *otros problemas* –en los que no vamos a profundizar– son los aspectos burocráticos de la profesión, la política educativa asfixiante y escasa remuneración.

En nuestro entorno, las nuevas ideas de enseñanza y aprendizaje del álgebra se han tenido poco o nada en cuenta. El *álgebra escolar aún tiene mucho que mejorar*, lo que se puede observar dando un vistazo a los programas oficiales de secundaria –bastante antiguos–, a los textos de matemática de secundaria accesibles a los profesores, y, a las propias prácticas educativas en liceos públicos y privados del país.

Esta investigación consiste en la propuesta de una *Unidad Didáctica sobre función afín* elaborada a partir de varias experiencias de docentes venezolanos en ejercicio, y del gran esfuerzo de reflexión didáctica realizado por la autora de este trabajo –todos ellos preocupados por una mejora de la calidad del proceso de enseñanza y aprendizaje–. Esta investigación está basada en valiosos y recientes descubrimientos de didáctica de la matemática, por lo que se trata de una innovación pedagógica muy pertinente y necesaria para los profesores de aula que desean participar en un proceso de enseñanza y aprendizaje de calidad sobre el tema de función afín.

La Unidad Didáctica que se propone en esta investigación, está basada en la teoría constructivista de la enseñanza y el aprendizaje significativo de Ausubel [1], y en el desarrollo de este trabajo, también se tienen muy en cuenta los estándares de álgebra para la etapa 6-8 y los estándares de proceso para todas las etapas de la escolaridad [2].

1.2. Justificación

[1] Cfr. AUSUBEL, David Paúl (1976). *Psicología evolutiva. Un punto de vista cognoscitivo*.
[2] Cfr. NCTM (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática,* p. 30-75; p. 226-235 y p. 260-289.

Existen *factores que deterioran la calidad del proceso* de enseñanza y aprendizaje del álgebra. La enseñanza de la función afín se imparte de una manera rutinaria, de forma desintegrada y sin relacionarla con la realidad que subyace.

La *mejora de la calidad del proceso de enseñanza y aprendizaje de la función afín* puede realizarse a través de la *elaboración de materiales didácticos bien pensados* que tengan una secuencia agradable, con ejemplos bien elegidos, conexiones significativas entre los diversos conceptos y una presentación, a la vez, profunda y sencilla del contenido. Estos materiales innovadores pueden ser de gran ayuda para el docente venezolano.

La mejora de la calidad de la enseñanza será una realidad si, entre otras cosas, aumenta la *disponibilidad de Unidades Didácticas* a los profesores de matemática en ejercicio en nuestro país. Unidades Didácticas *elaboradas por los propios docentes* venezolanos y basadas tanto en su experiencia como en los aportes de las investigaciones en educación matemática, que incluyan las nuevas tendencias e innovaciones en álgebra.

La *perspectiva del proceso de enseñanza y aprendizaje significativo* es un aporte en la elaboración de esos documentos, se comienza desde los conocimientos previos del estudiante, los conocimientos nuevos se estructuran sobre un tema específico de una forma cognitivo–integradora, y se promueve el desarrollo de competencias matemáticas en el alumno.

Los estudiantes necesitan asimilar de una forma sistemática y con sentido, tanto las *conexiones entre las diversas representaciones y conceptos asociados a la función afín* –expresión algebraica, representación gráfica, proporcionalidad directa de las variables dependiente e independiente, la pendiente, la ordenada en el origen, punto de corte con eje de abcisas, rectas paralelas y perpendiculares–, como la *relación con el entorno* en que se desenvuelven como seres humanos en sus experiencias cotidianas.

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1. General

Presentar una propuesta concreta de una Unidad Didáctica sobre función afín –innovadora y aplicable– basada en la teoría constructivista de un aprendizaje significativo para los alumnos, *que pueda ser utilizada fácilmente por el docente venezolano* al transmitir dicho contenido curricular a estudiantes de 9º grado de Educación Básica III (cfr. ANEXO 1).

1.3.2. Específicos

1.3.2.1. *Validar la Unidad Didáctica sobre función afín (primera versión)* mediante su utilización en el ciclo de clases dadas a siete grupos de estudiantes de 9º grado durante el segundo lapso escolar del curso 2004-2005 (cfr. 3.2.2. y 3.2.3.), y *reflexionar acerca del proceso de enseñanza y aprendizaje a través de los resultados* obtenidos en los alumnos y en los profesores (cfr. 3.2.4. y 3.1.1.).

1.3.2.2. *Aplicar la Unidad Didáctica reelaborada (versión definitiva)* al grupo principal de estudio –estudiantes del *INCAP Los Samanes*– durante el tercer lapso escolar del curso 2004-2005 (cfr. 3.2.2.) y *analizar el proceso de enseñanza y aprendizaje* desde la perspectiva de los resultados del aprendizaje significativo de los estudiantes y del mejoramiento profesional del docente (cfr. 3.3.3. y 3.3.4.).

1.3.2.3. *Promover, comprobar y mejorar la calidad del proceso de enseñanza y aprendizaje* mediante el desarrollo activo de competencias matemáticas en los alumnos a través de una *transmisión significativa* del tema de función afín (cfr. 4.5. y 4.6.).

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO. UNIDADES DIDÁCTICAS EN LA MATEMÁTICA DE SECUNDARIA

2.1. Unidades Didácticas en la matemática de secundaria

2.1.1. El docente de matemática de secundaria en ejercicio

Muchos docentes en ejercicio experimentan la *necesidad de mantenerse en formación continua* para dar la talla en este mundo tan competitivo. La actualización sobre los avances en el campo de la Didáctica de la Matemática es de gran utilidad en el momento de incorporar innovaciones en el aula de clase.

Hoy en día, todas las capas de la población requieren de conocimientos matemáticos, ya que la actual *noosfera* [3] se los exige para desenvolverse con soltura en los trabajos cotidianos. En este sentido, el profesor de matemática de secundaria ha de ser consciente del papel que le corresponde en el último peldaño del proceso de transposición didáctica [4], *el saber a enseñar de un objeto matemático,* ya que gran parte de la población adquirirá en el aula de clase los conocimientos matemáticos básicos que necesitarán en sus labores profesionales.

Cada vez que comienza un periodo de clases, especialmente cuando se han de impartir contenidos matemáticos a un nivel distinto del acostumbrado, el profesor se cuestiona acerca de los aspectos básicos del proceso de enseñanza en su caso concreto: qué enseñar; cómo

---

[3] La *noosfera* es el "complejo sistema formado por las personas que en la sociedad piensan y deciden sobre los contenidos y métodos de enseñanza (matemáticos, diseñadores de currículo, políticos, formadores de profesores, escritores de libros de textos, asociaciones de profesores, padres de alumnos, directores y administradores de centros de enseñanza)". (Chevallard, 1991). Texto tomado de RUIZ HIGUERAS, Luisa (2004). *La transposición didáctica: del saber científico al saber enseñado*, p.1, nota 1.

[4] "El término de *transposición didáctica* designa el conjunto de transformaciones que sufre un saber científico con el fin de ser enseñado. La existencia de esas transformaciones es un hecho conocido aunque aún muy poco estudiado". Ibid., p. 1.

enseñar; cuándo enseñar; qué, cómo y cuándo evaluar. Los profesores competentes tratarán de realizar lo mejor posible la programación de actividades con el fin de impartir una educación matemática de calidad.

El perfil actual del profesor de matemática de secundaria es bastante exigente, se le pide que posea: dominio del tema ó contenido; desarrollo crítico en beneficio del aprendizaje de los alumnos; preparación didáctica; y, creencias valiosas acerca de su propia labor [5].

2.1.2. El Currículo y la Unidad Didáctica

Existen tres niveles de concreción del currículo, *diseño curricular obligatorio* propuesto por el Ministerio de Educación; *proyecto curricular* del Centro Educativo; y, por último, *programaciones de aula* [6]. Y, son cuatro las dimensiones del currículo, la *cultural/conceptual*, la *cognitiva o de desarrollo*, la *ética ó formativa* y la *social* [7].

Para realizar la *planificación de aula* hay que tener en cuenta la *planificación del sistema educativo:* cada profesor reflexiona sobre el currículo que le toca impartir en clase durante un período de tiempo y realiza su propia programación teniendo en cuenta las cuatro dimensiones del currículo.

Es similar la estructuración de estos dos niveles educativos –la planificación de aula y la del sistema educativo– respecto a las dimensiones del currículo. Esa estructuración se presenta en el cuadro siguiente [8]:

Dimensiones ------------- Niveles	1ª dimensión: Cultural/ conceptual	2ª dimensión: Cognitiva o de desarrollo	3ª dimensión: Ética o formativa	4ª dimensión: Social
Planificación para el aula	Contenidos	Objetivos	Metodología	Evaluación
Sistema Educativo	Conocimientos	Alumnos	Profesor	Escuela

El *esfuerzo de reflexión* sobre lo que se quiere transmitir a un grupo concreto de alumnos en un contexto bien determinado es la clave para realizar *propuestas didácticas* que

[5] Cfr. PINTO SOSA, Jesús Enrique (2001). *Perfil del profesor promedio en Matemáticas del nivel secundaria.*
[6] Cfr. CALLEJO, María Luz (1992). *Orientaciones para la Elaboración de Unidades Didácticas. Área de Matemáticas*, p. 32.
[7] Cfr. RICO, Luis (Coord.) (1997). *La Educación matemática en la enseñanza secundaria*, p. 15-38.
[8] El cuadro está tomado de Ibid., p. 28.

puedan ser experimentadas en el aula de clase y luego mejoradas a lo largo de la práctica profesional.

El currículo actual de la matemática de secundaria se organiza entorno a dos aspectos, el *disciplinar* o de contenidos (Números y Operaciones, Álgebra, Geometría, Medida, Análisis de datos y Probabilidad), y, el *cognitivo* (Conceptos, Procedimientos y Actitudes). Sin embargo, los objetivos generales concernientes de un tema a otro no varían en la metodología y evaluación, aspecto que empobrecerá el desarrollo pedagógico.

Esto quiere decir que, la estructura de los documentos curriculares tiene bien diferenciadas sus unidades respecto a los contenidos, sin embargo las diferencias son mínimas respecto a los objetivos específicos, a la metodología y a la evaluación. Así pues, del docente en ejercicio depende la elaboración precisa de su planificación de aula.

Cuando el profesor ha de poner en práctica las directrices curriculares con un grupo concreto de alumnos, necesita tomar una serie de decisiones de carácter general. Decisiones que se concretan mediante criterios para:

- la selección, secuenciación y organización de los *contenidos*;
- la organización, desarrollo y control del *trabajo de aula*;
- las prioridades en el *proceso de construcción del conocimiento* y en la *asignación de significados* por parte de los alumnos;
- la valoración de los *logros en el aprendizaje* y del *tratamiento adecuado de los errores*.

Estos criterios se ajustan a las cuatro *componentes fundamentales del currículo*, que surgen de nuevo al considerar el aula como espacio de trabajo y al profesor como agente principal del proceso educativo.

El concepto de *Unidad Didáctica* podemos expresarlo con las siguientes palabras de Callejo, “es una unidad de trabajo relativa a un proceso de enseñanza y aprendizaje, articulado y completo. En ella se detallan los contenidos, los objetivos, las actividades de enseñanza y aprendizaje y las actividades de evaluación. Estos elementos han de tener en cuenta los diferentes niveles de los alumnos y, han de desarrollar en función de ellos, las necesarias adaptaciones” [9].

Esta definición tan rica en aspectos lleva a intuir, por una parte, que cada docente ha de ser innovador y creativo en el momento de elaborar una Unidad Didáctica, y por otra, la conveniencia de tomar en cuenta los trabajos de otros profesores, ya que pueden ser una gran ayuda para el desarrollo de las clases ó la elaboración de los propios documentos didácticos.

2.1.3. Orientaciones para la elaboración de Unidades Didácticas

Son amplios y profundos los estudios que presentan orientaciones para la elaboración de Unidades Didácticas. En cualquier estudio está siempre presente la reflexión sobre los tres aspectos clave del proceso de enseñanza y aprendizaje: quién es el *profesor*, cuáles son sus fortalezas y sus debilidades; con qué grupo de *estudiantes* se va a trabajar; y, cuál es el *objeto matemático* que se desea transmitir.

Los próximos apartados recogen las orientaciones y experiencias de expertos en la elaboración de Unidades Didácticas de Matemática. Coinciden en muchos aspectos, unos autores explicitan más unos aspectos que otros, y, por supuesto, se trata de excelentes materiales de referencia para el profesor que decida elaborar sus propias Unidades Didácticas o evaluar las que ya están elaboradas por otras personas y, por tanto, pueden servir de pauta para la enseñanza de un tema de matemática.

2.2. Experiencias de M. L. Callejo

La primera parte de la monografía *Orientaciones para la Elaboración de Unidades Didácticas. Área de Matemáticas* [10] consta de un conjunto de materiales que han resultado muy prácticos a bastantes profesores que se han propuesto el diseño de alguna Unidad Didáctica.

Esas páginas tratan de dar respuesta a algunas preguntas básicas que se plantea el docente respecto al diseño de las Unidades Didácticas: ¿qué son? ¿cuáles son las fases del

---

[9] CALLEJO, María Luz, op. cit., p. 5-40. Para un análisis más detallado sobre el currículo en la matemática escolar, cfr. RICO, Luis, op. cit., p. 15-38.
[10] Cfr. CALLEJO, María Luz, op. cit.

proceso de elaboración? ¿qué aspectos conviene tener claro antes de desarrollarla? ¿cuáles son sus elementos constitutivos? ¿cómo mejorarla a partir de su experimentación en el aula? ¿cómo evaluarla?

2.2.1. Fases del diseño de Unidades Didácticas [11]

El texto de Callejo señala cinco fases bien determinadas, éstas son: prediseño, desarrollo, experimentación, evaluación y diseño definitivo. A continuación se describe cada una de ellas:

- *prediseño*, consiste en la "explicitación de las intenciones educativas y de decisiones relativas a los planteamientos psico-pedagógicos, sociológicos, epistemológicos y didácticos y a las decisiones acerca de los elementos básicos del currículo";
- *desarrollo*, es una "explicitación de los objetivos, contenidos, actividades de enseñanza-aprendizaje, materiales, estrategias didácticas, evaluación y duración";
- *experimentación,* fase clave para llegar a buen término el trabajo del docente, se trata de la "aplicación en el aula de la Unidad Didáctica diseñada";
- *evaluación*, es decir, la "valoración de la Unidad Didáctica en relación a su adecuación a los objetivos perseguidos";
- y, la última fase es el *diseño definitivo*, al que se llega con la "modificación y mejora de la Unidad Didáctica de acuerdo con la valoración anterior".

2.2.2. Planteamientos previos [12]

La autora de la monografía explica que previo a la elaboración de una Unidad Didáctica, el docente ha de hacerse unos *planteamientos relativos a las fuentes del currículo* y unas *decisiones respecto a los elementos básicos del currículo*.

Los *planteamientos relativos a las fuentes del currículo* son los que se presentan a continuación:

[11] Las citas textuales de este apartado pertenecen a Ibid., p. 8.
[12] Las citas textuales de este apartado pertenecen a Ibid., p. 13-14.

- los *psicopedagógicos*, en los que "se explicita la concepción del proceso de enseñanza–aprendizaje, según las teorías constructivistas: el alumno como agente del propio aprendizaje y el profesor como mediador del proceso";
- los *sociológicos*, en los cuales "se explicitan las características sociológicas del alumnado y del centro educativo, que se deseen tener en cuenta";
- los *epistemológicos,* en los que "se expresa la forma concreta de abordar las matemáticas dentro del Currículo Básico";
- y, por último, los *didácticos,* en el cual "se explicitan la aplicación de los anteriores planteamientos a la situación concreta de proceso de enseñanza–aprendizaje que constituye la Unidad Didáctica, atendiendo a las características de los alumnos (capacidad intelectual, motivación y conocimientos previos) y a las circunstancias del desarrollo de la Unidad Didáctica (comienzo, transcurso, final de etapa, ciclo, curso ó trimestre)".

Las *decisiones relativas a los elementos básicos* del currículo consisten en una serie de elecciones que el docente ha de hacer antes de elaborar la Unidad Didáctica, éstas son:

- las "decisiones relativas *al QUE y PARA QUE enseñar y evaluar",* es decir, "contextualizarla dentro del Proyecto Curricular del Centro y de la programación de aula; elegir un enfoque que presida el desarrollo de la Unidad Didáctica; definir contenidos a cubrir; elaborar un mapa conceptual que exprese la relación entre los contenidos y las relaciones lógicas entre ellos; planificar contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales; concretar los objetivos generales y específicos; determinar qué aspectos se van a evaluar y la finalidad de la evaluación; y, planificar el tipo de estrategias didácticas";
- las "decisiones relativas *al COMO enseñar y evaluar*", es decir, "establecer unos criterios metodológicos (modelo de enseñanza que subyace, modelo de intervención del profesor, estrategias didácticas); selección o elaboración de las actividades de los alumnos; selección de los recursos materiales necesarios; planificar el modo de evaluación; determinar si la evaluación va a ser normativa o criterial; y, hacer las necesarias adaptaciones curriculares";

- las “decisiones relativas *al CUANDO enseñar y evaluar*”, es decir, “temporalización; especificar las estrategias didácticas que se van a utilizar en cada fase de la Unidad Didáctica (actividades de introducción, de desarrollo y de recapitulación); y, determinar los momentos de la evaluación”.

2.2.3. Elementos constitutivos de una Unidad Didáctica

Los elementos constitutivos de una Unidad Didáctica que presenta el escrito de Callejo son, el *enfoque*, el *título*, los *objetivos*, los *contenidos*, las *actividades de enseñanza-aprendizaje*, los *materiales*, las *estrategias didácticas,* la *evaluación* y la *duración*. A continuación se hace una descripción de cada uno de ellos:

- el *enfoque*, puede hacerse desde dos puntos de vista, el de la organización de los contenidos (globalización, interdisciplinariedad, integración de contenidos, u organización en paralelo), o el de la concepción de las matemáticas (heurístico o instrumental);
- el *título*, viene determinado por un contenido-eje, por un tema interdisciplinar que conecta intereses, o por un tema transversal como eje que integra contenidos;
- los *objetivos*, son de dos tipos, los generales y los didácticos;
- los *contenidos*, aquellos que se van a tratar (conceptuales, procedimentales y actitudinales), los pre-requisitos (conocimientos previos) y la secuencia en su presentación;
- las *actividades de enseñanza–aprendizaje*, han de estar bien descritas en su objetivo, metodología y temporalización; se clasifican en actividades de introducción, de desarrollo y de recapitulación;
- los *materiales* para los alumnos, pueden ser de diversos tipos (escritos, manipulables, audiovisuales, calculadoras, computadoras), se han de seleccionar con unos criterios relativos a su función en las diversas actividades; y los propios del profesor, son muy importantes;
- las *estrategias didácticas*, respecto a la actuación del profesor y al modo de trabajo de los alumnos;

- la *evaluación*, tanto de aspectos concretos del avance de los alumnos (en su proceso de aprendizaje, en las actitudes, en las tareas realizadas, y en su participación), como de la Unidad Didáctica en sí;
- la *duración* de una Unidad Didáctica, suele ser de 10 a 20 horas, y preferiblemente, con períodos de clase de 90-100 minutos.

2.2.4. Estrategias privilegiadas por el enfoque constructivista

"El *modelo constructivista* del aprendizaje requiere que el profesor seleccione situaciones problemáticas y trate de crear un clima de libertad para que los alumnos puedan expresarse con espontaneidad" [13]. Los aspectos que la autora trata en la monografía son, el *contexto del aprendizaje* y las *estrategias didácticas*. A continuación se detalla cada uno:

- el *contexto del aprendizaje,* se ha de prever que la dinámica de la clase se desarrolle en un ciclo con varias etapas, las cuales son: orientación del trabajo, trabajo exploratorio en grupo, confrontación de ideas, revisión (discusión final) y aplicación. Este ciclo se puede desarrollar en una o más sesiones, en este último caso se da espacio al fenómeno de la incubación de ideas (aspecto decisivo en la resolución de un problema);
- las *estrategias didácticas* destacadas son las que atienden a la naturaleza de las actividades propuestas a los alumnos (situaciones problemáticas, problemas de aplicación y ejercicios) [14]; las que atienden al método de trabajo de los alumnos (individual, cooperativo o de trabajo en grupo, puesta en común y debate); y, las que atienden a la actuación del profesor/a (elegir las actividades, orientar el trabajo de los estudiantes y moderar la puesta en común de los conocimientos o debate).

2.2.5. Experimentación de una Unidad Didáctica: elementos para la evaluación por parte del profesorado

[13] CALLEJO, María Luz, Ibid., p.20.
[14] En CALLEJO, María Luz, Ibid., p. 21-23 aparecen unos cuadros comparativos muy interesantes de cada uno de estos conceptos, en el ámbito de la Didáctica de la Matemática.

La autora presenta *once preguntas* para poder evaluar la Unidad temática elaborada y/o experimentada. Algunas son [15]: "¿han sido *evaluados* todos los objetivos de aprendizaje de los alumnos propuestos en la Unidad Didáctica al nivel que se deseaba?", "¿qué *objetivos* han alcanzado los alumnos y a qué nivel?", "la forma de presentar los *contenidos*, ¿ha sido adecuada en relación con los siguientes elementos: el nivel de maduración de los alumnos; su contexto social, económico y cultural; sus intereses y motivaciones?", etc.

Además, cuestiona aspectos de la *evaluación de la Unidad Didáctica como recurso* para el trabajo del docente, en relación a su visión global, a las actividades introductorias, a las actividades de presentación y aplicación de los contenidos, a las de recapitulación y a su mismo contenido temático.

Las preguntas elaboradas por Callejo han servido de referencia para la evaluación de la Unidad Didáctica sobre función afín (cfr. 3.2.3.2. y ANEXO 3), por este motivo no se desglosan ahora.

2.3. Experiencias de L. Rico, A. Marín y otros autores [16]

El libro *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* escrito bajo la coordinación de Luis Rico contiene capítulos de diversos autores. Rico después realizar unas consideraciones sobre el currículo, se dedica a uno de los objetivos del libro, "aportar una reflexión sistemática para el profesor de matemáticas, bien fundada y eficaz para la organización de sus actividades de planificación y diseño de Unidades Didácticas" [17]. Los capítulos del libro tratan de dar respuesta a algunos problemas básicos que se plantea el docente respecto al diseño de las Unidades Didácticas, cada capítulo está dedicado de manera interdependiente a un organizador de Unidades Didácticas, el último capítulo ejemplifica todo lo escrito en el libro.

Las *directrices curriculares de los programas* de matemáticas escolares se diferencian muy poco respecto a tres de las dimensiones del currículo, la metodología, los objetivos y la

[15] Las citas textuales de este apartado pertenecen a Ibid., p. 27.
[16] Cfr. RICO, Luis (1997). *La Educación matemática en la enseñanza secundaria,* p.39-45. Cuando aparezcan citas textuales de este libro, la referencia a pie de página será más breve.
[17] Ibid., p. 52.

evaluación (objetivos generales), esto quiere decir que en los contenidos de las Unidades Didácticas (objetivos específicos) reside la gran diferencia de las dimensiones del currículo. Por ello, el profesor de matemática al elaborar una Unidad Didáctica se cuestiona acerca de: los criterios a seguir para la selección, secuenciación y organización de los contenidos; la posibilidad de encontrar otros elementos, distintos de los contenidos, que expresen un conocimiento objetivo y útil; y la existencia de fuentes objetivas de conocimientos que sean adecuadas para la organización de su documento.

Es necesario, por tanto, un *nuevo nivel de reflexión curricular* que conecte más de cerca con la programación de aula, es decir, es necesario encontrar nuevas herramientas conceptuales con las que trabajar para diseñar, desarrollar y evaluar Unidades Didácticas. Rico llama *organizadores del currículo* a estos nuevos conceptos y herramientas.

2.3.1. Los organizadores del currículo [18]

Al compartir una cultura matemática profunda, los profesores pueden articular de manera diversa un tema concreto, en palabras de Rico, ellos "tienen la formación suficiente y fuentes documentales adecuadas para dar forma y expresión coherente a sus coincidencias sobre los contenidos, pero también, lo cual es aún más importante, a sus discrepancias" [19].

Existen otros conocimientos, distintos de los contenidos, que son útiles y necesarios para una adecuada programación de aula ó elaboración de una Unidad Didáctica. En muchos casos, estos conocimientos no están explícitos pero existen, son esas *ideas que subyacen* en la organización de tema y los *organizadores* que estructuran una Unidad Didáctica.

El autor llama *organizadores del currículo* a aquellos conocimientos que se adoptan como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de Unidades Didácticas. De esta forma, el conocimiento didáctico sobre un contenido concreto del currículo queda estructurado por la aportación que hace cada uno de los organizadores a dicho tema.

---

[18] Cfr. Ibid., p. 45-59.
[19] Ibid., p. 44.

Los organizadores seleccionados llegan a ser instrumentos concretos para la planificación y diseño de Unidades Didácticas. El autor hace una propuesta de este grupo de elementos:

- *ubicación y tratamiento* de cada tópico en el diseño curricular obligatorio y en el proyecto curricular del centro;
- *organización cognitiva* de los contenidos, es decir, según su clasificación en conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes;
- *análisis fenomenológico* de los contenidos o análisis de situaciones y contextos en las que se presentan y emplean;
- *modelos y representaciones,* este organizador se refiere a los aspectos visuales y simbólicos del conocimiento y su aprendizaje;
- *errores y dificultades* que aparecen durante la enseñanza y el aprendizaje, los cuales son resultado de investigaciones realizadas sobre diversos tópicos;
- *materiales y recursos,* los materiales son concreciones de modelos y los recursos proporcionan situaciones en las que el concepto estudiado se emplea significativamente y permite desarrollar algunos procedimientos;
- *desarrollo histórico del tópico*, cuya finalidad es señalar algunos momentos de la historia de la matemática en los que el tema considerado tuvo un desarrollo especial o desempeñó algún papel de interés; suele ser muy útil para captar la curiosidad y motivación de los alumnos;
- *elaboración de bibliografía básica* sobre el tema, la cual ha de recoger los documentos más significativos de los apartados anteriores y ofrecer ejemplos de Unidades Didácticas similares realizadas en el propio centro educativo, o, del propio profesor.

Es importante que los profesores de matemática se acostumbren a mejorar los propios materiales didácticos, a localizar y archivar materiales ricos en contenido que podrían ser incluidos en sus Unidades Didácticas para mejorarlas, porque “en tanto no entre en la cultura de los profesores la realización y conservación de documentos relativos a la planificación de Unidades Didácticas no será posible dar objetividad, peso y continuidad a estas actividades"[20].

El primero y el último organizador –ubicación y tratamiento de cada tópico, y elaboración de bibliografía básica sobre el tema- sirven de contexto para la Unidad Didáctica[21]. En los siguientes apartados (cfr. 2.3.2 – 2.3.7.) se describen algunos de los organizadores mencionados, y en el 2.3.8. se exponen algunas ideas sobre la programación de Unidades Didácticas.

2.3.2. Organización cognitiva de los contenidos [22]

Los objetivos específicos de una Unidad Didáctica se clasifican en *conceptuales*, *procedimentales* y *actitudinales*. Rico se detiene en los dos primeros y no toma en cuenta de manera relevante el tercero.

Los contenidos de una Unidad Didáctica desde su aspecto cognitivo, se clasifican en:

- *conceptos*, "son aquellos con los que pensamos y, según su mayor o menor concreción se puede distinguir tres niveles de conocimiento en el campo conceptual, los *hechos* (unidades de información que sirven como registros de los acontecimientos), los *conceptos* propiamente tales (describen una regularidad o relación de un grupo de hechos, suelen admitir un modelo o representación y se designan con signos o símbolos) y las *estructuras conceptuales* (sirven para unir conceptos o para sugerir formas de relación entre conceptos constituyendo, a veces, conceptos de orden superior)";
- *procedimientos*, consisten en las formas de actuación o de ejecución ordenada de una tarea; se pueden distinguir tres niveles, las *destrezas* (consisten en la transformación de una expresión simbólica en otra expresión, para lo que hay que ejecutar una secuencia de reglas sobre manipulación de símbolos), los *razonamientos* (se presentan al procesar relaciones entre conceptos y permiten establecer relaciones de inferencia entre ellos),

[20] Ibid., p. 55.
[21] Una lista de libros de referencia para trabajar Unidades Didácticas de temas de matemática. Cfr. CALLEJO, María Luz, op. cit., p. 35-39.
[22] Cfr. RICO, Luis, p. 30-34. Las citas textuales de este apartado han sido tomadas de esas páginas.

y, las *estrategias* (se ejecutan sobre representaciones de conceptos y relaciones, operan dentro de una estructura conceptual);

- *actitudes*, consisten en un conjunto de modos propios y hábitos en los alumnos al realizar la actividad matemática.

En el capítulo I del libro mencionado, p. 30-34, Rico analiza con más detalle la *organización cognitiva de los contenidos* que el lector interesado puede consultar.

2.3.3. Análisis fenomenológico [23]

El *análisis fenomenológico* "realiza un balance de los fenómenos para cuya comprensión y dominio se elaboraron los correspondientes conocimientos matemáticos" [24].

Freudenthal fue el gran impulsor del análisis fenomenológico como componente del análisis y tratamiento didáctico del conocimiento matemático. Puig destaca dos ideas básicas de este organizador del currículo:

- por la *naturaleza de los objetos matemáticos y de la práctica matemática,* hay que dar a los alumnos la oportunidad de realizar actividades en las que tengan acceso a una genuina experiencia del quehacer matemático [25];
- es necesaria la toma de conciencia por parte del profesorado de *los objetivos a perseguir en la enseñanza matemática por las capas amplias de la población*, es decir, respecto a los conocimientos matemáticos que han de manejar las personas en sus labores cotidianas [26].

En este contexto Puig explicita que para elaborar Unidades Didácticas es importante relacionar el contenido matemático a desarrollar con los siguientes aspectos:

- *relación con la vida cotidiana*, descubrir situaciones de la vida cotidiana y laboral en las que se presentan y se emplean los conceptos y procedimientos tratados;
- introducir a los estudiantes en la *familiarización de los lenguajes propios de las matemáticas* para que exista una cierta continuidad entre el lenguaje conocido por el

---

[23] Cfr. PUIG, Luis. En: Ibid., p. 61-94.
[24] RICO, Luis, p. 53.
[25] Cfr. Ibid., p. 65. Cfr. ANEXO 1, Actividades Nº 2 - 4.
[26] Cfr. RICO, Luis, p. 75.

alumno y los nuevos signos de referencia de conceptos matemáticos, garantía de que el lenguaje utilizado por el profesor será bien entendido por los alumnos;

- introducir los contenidos desde su *génesis histórico-cognitiva,* es decir, que el aprendizaje matemático nazca en el alumno de la misma forma en que fue descubierto en la historia;
- *la resolución de problemas* ofrece a los alumnos la ocasión de experimentar un auténtico quehacer matemático que les permita el descubrimiento de nuevos conocimientos;
- *contextualizar* o utilizar algunas situaciones de la vida real en el momento en el cual se introduce un contenido matemático en el aula de clase;
- *iluminar las conexiones* de los contenidos matemáticos con las ciencias experimentales, el arte, la economía y otras ramas del saber.

Al final del capítulo III del libro mencionado, Puig recorre los contenidos del currículo de secundaria y esboza un análisis fenomenológico de los mismos que el lector interesado puede consultar.

2.3.4. Representaciones y modelización [27]

Este aspecto de la matemática tan valorado en la perspectiva didáctica actual, "se refiere a los aspectos visuales y simbólicos del conocimiento y de su aprendizaje" [28], ya que:

- las *representaciones* son una ayuda en la organización de la información sobre un objeto matemático, de forma que se facilite poder pensar sobre él, expresar su significado y su utilización en situaciones y problemas prácticos o convencionales de la escuela; las representaciones también se utilizan para modelizar fenómenos naturales o sociales;
- los *modelos* se utilizan para la presentación y desarrollo de un determinado concepto.

---

[27] Cfr. CASTRO, Encarnación y Enrique Castro. En: RICO, Luis, p. 95-124.
[28] RICO, Luis, p. 53.

Este organizador se vincula principalmente con los contenidos y metodología curriculares, y secundariamente con los objetivos y con la evaluación del contenido; estos vínculos se dan de las siguientes maneras [29]:

- *con los contenidos*, ya que "cada concepto viene determinado por sus representaciones y los procedimientos derivados se ponen en práctica mediante actividades de modelización";
- *con la metodología*, "ya que la secuencia y el orden en que se presentan las diversas representaciones de un mismo concepto deben estar planificadas y diseñadas para conseguir su mejor integración; igualmente, las posibles modelizaciones ayudan a ejemplifican los conceptos matemáticos y encauzan la estrategia para su desarrollo";
- *con los objetivos*, ya que en ellos "debe quedar claro qué tipo de representaciones han de manejarse en cada concepto clave y en qué niveles deben poder convertirse unas en otras; así mismo, deben marcarse los usos de los principales conceptos en tareas de modelización";
- *con la evaluación*, ya que ésta "deberá poner de manifiesto las carencias y limitaciones en el uso de las diversas representaciones y en las tareas de traducción entre ellas".

En el capítulo IV del libro, los autores analizan detalladamente las representaciones y modelos que el lector interesado puede consultar y enriquecerse con su contenido.

2.3.5. Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje [30]

La finalidad de este organizador del currículo es conocer los *errores y dificultades* que aparecen durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, y que han sido estudiados en investigaciones científicas. Los errores detectados en los alumnos pueden estar relacionados con aspectos conceptuales o procedimentales.

Se observa "que hay determinados conocimientos que lleva más tiempo comprender o en los que hay un mayor número de alumnos que no los comprenden correctamente" [31], estos conocimientos son considerados como de mayor dificultad.

---

[29] Las próximas citas textuales son de Ibid., p. 56.
[30] Cfr. SOCAS, Martín. En: RICO, Luis, p. 125-154.
[31] RICO, p. 54.

Es de gran ayuda para el profesor que elabora una Unidad Didáctica tener en cuenta los siguientes aspectos:

- disponer de *información sobre los puntos que van a tener una dificultad especial*, así como de aquellos *errores o conocimientos insuficientes* que los alumnos pueden encontrar;
- saber *cómo diagnosticar los errores* en sus alumnos y *qué tratamiento seguir* con ellos para remediar sus deficiencias.

Al profesor que elabora la Unidad Didáctica, esos aspectos le ayudan a contar con [32]:

- *esquemas con los que organizar la secuenciación* de los contenidos, porque facilitan la superación de dificultades específicas;
- *criterios para establecer objetivos*, porque "marcan los errores prioritarios que deben evitarse y los obstáculos que hay que superar";
- *orientaciones metodológicas*, porque "permiten diseñar situaciones que planteen conflictos cognitivos en los alumnos, en las que sea necesario reestructurar los conocimientos previos y superar las dificultades conceptuales";
- *indicadores para la evaluación* de cada tópico, porque "señalan las tareas sobre las que conviene valorar el conocimiento de los alumnos para diagnosticar sus carencias y ayudarles en su superación".

En el capítulo V del libro, Socas analiza detalladamente este organizador de Unidades Didácticas que el lector interesado puede consultar y enriquecerse con el contenido.

---

[32] Las próximas citas textuales son de Ibid., p. 55-56.

2.3.6. Materiales, recursos y actividades: un panorama [33]

Los *materiales* "son concreciones de modelos realizadas por empresas, casas comerciales o por el propio profesor", y los *recursos* (noción más amplia), "proporcionan situaciones, o ayudas para trabajar en una situación, en las que el concepto estudiado se emplea significativamente y permite desarrollar algunos procedimientos". Uno de los recursos más potentes en la actualidad son los derivados de las nuevas tecnologías.

Este organizador está vinculado principalmente con la metodología, y secundariamente con los objetivos y evaluación; estos vínculos se dan de las siguientes maneras:

- con la *metodología*, "ya que ayuda a establecer secuencias metodológicas";
- con los *objetivos*, ya que "proporcionan los soportes con los que se presentan y refuerzan los conceptos y procedimientos matemáticos";
- con la *evaluación*, ya que "proporcionan nuevas tareas de evaluación, más abiertas y creativas".

Los diversos niveles de complejidad de los de los materiales y recursos utilizados en el aula inciden en todas las dimensiones del currículo.

En el capítulo VI del libro, Coriat analiza detalladamente este organizador de Unidades Didácticas que el lector interesado puede consultar y enriquecerse con el contenido. Propone actividades muy interesantes y un trabajo con fotografías.

2.3.7. Notas de historia de la matemática [34]

El *desarrollo histórico del tópico* tiene "por finalidad el señalar algunos momentos a lo largo de la historia de la matemática en los que el conocimiento matemático considerado tuvo un desarrollo especial o desempeñó algún papel de interés" [35].

---

[33] Cfr. CORIAT, Moisés. En: RICO, Luis, p. 155-177. Las próximas citas textuales son de RICO, Luis, p. 54 y 56.
[34] Cfr. SIERRA, Modesto. En: RICO, Luis, p. 179-194.
[35] RICO, Luis, p. 54. Las próximas citas textuales son de Ibid., p. 54.

Poner énfasis en la dimensión cultural e histórica del contenido, sin pretender realizar un estudio exhaustivo y completo es de gran utilidad en la programación de Unidades Didácticas porque puede servir para:

- *motivar a los estudiantes*, ya que se sienten especialmente interesados cuando se les proporciona información adecuada sobre la historia de la matemática y los antecedentes de un contenido;
- *poner ejemplos y proponer ejercicios curiosos*, que lleven a revisar las dificultades históricas del descubrimiento de un concepto, aliciente excelente para que los alumnos superen las mismas o parecidas dificultades [36].

Este organizador está vinculado principalmente con los contenidos y la metodología, y secundariamente con los objetivos; estos vínculos se dan de las siguientes maneras [37]:

- con los *contenidos*, ya que "pone de manifiesto qué propiedades de cada concepto han tenido relevancia en distintos momentos históricos, qué notaciones se utilizaron y qué limitaciones se presentaron en cada caso";
- con la *metodología*, ya que "ayuda a reforzar el interés de los alumnos por las distintas facetas de cada concepto";
- con los *objetivos* educativos, ya que muestra el carácter contingente del conocimiento científico, su proceso de elaboración por personas concretas y su vinculación con épocas históricas determinadas, para dar respuesta a problemas científicos de cada época".

Además, la consideración del proceso histórico permite:

- *valorar la belleza de las construcciones intelectuales* y la importancia de las tareas bien hechas, ya que "los nuevos conocimientos matemáticos de una época concreta de la historia fueron incubados por otros matemáticos mucho tiempo antes, a veces siglos, hasta llegar al descubrimiento; conocimientos que han de ser expuestos en unas pocas horas de clase";

---

[36] Cfr. por ejemplo, ANEXO 1, Actividad Nº 15.
[37] Las próximas citas textuales son de RICO, Luis, p. 56-57.

- *relativizar las dificultades del aprendiza*je y los fallos en la evaluación, ya que "muestra cómo algunos de los errores de los alumnos han tenido unos antecedentes históricos, que fueron superados por necesidades de coherencia y precisión".

En el capítulo VII del libro, Sierra recorre los contenidos del currículo de secundaria y esboza su conexión con su génesis histórica que el lector interesado puede consultar. Hasta ahora, en el área de Didáctica de la Matemática, concretamente de *Historia de las Matemáticas,* se considera un *betseller* a la excelente historia narrada en comiquitas por J.L. Carlavilla y G. Fernández (2004). En él, los contextos histórico-geográficos y los problemas matemáticos se presentan a la par, y los lectores de cualquier edad podrán disfrutar y enriquecerse con el libro.

2.3.8. Programación de Unidades Didácticas [38]

La Unidad Didáctica es el lugar de encuentro entre la planificación educativa y la práctica docente. En este contexto, las primeras *tareas de un profesor* al elaborar una Unidad Didáctica sobre un tema concreto, son:

- *revisar cada uno de los organizadores* sobre un tema concreto y reflexionar ampliamente sobre la valiosa información que aumenta el depósito de sus conocimientos;
- llevar a cabo una *selección razonada* de los documentos, informaciones y materiales obtenidos, atendiendo al contexto particular en el que se ha de aplicar, con el fin de desarrollar la Unidad Didáctica sobre dicho tema;
- componer el *diseño general de su trabajo* apoyado en la selección de prioridades establecidas respecto a los organizadores; de esta forma, establece los objetivos, contenidos, metodología y evaluación de cada tema.

Rico detalla los aspectos a tener en cuenta sobre cada una de esas cuatro dimensiones del currículo en el proceso de elaboración de una Unidad Didáctica, que el lector interesado puede consultar [39].

---

[38] Cfr. Ibid., p. 195-228.
[39] Cfr. Ibid., p. 57-58.

La programación de una Unidad Didáctica ha de enmarcarse en el *proyecto del centro educativo*; ya que, el proyecto curricular del departamento didáctico correspondiente, al conocer las fortalezas y debilidades de los alumnos, pone más énfasis en los objetivos que considera prioritarios.

Para llevar a buen término el desarrollo de su Unidad Didáctica, el profesor toma las *decisiones necesarias* sobre los siguientes aspectos:

- la *selección de objetivos generales y específicos* de la Unidad Didáctica se establece por lo general, en primer lugar, por el contenido curricular a desarrollar, y, secundariamente, por los criterios fundamentados en corrientes de la Didáctica de la Matemática que priman en las orientaciones curriculares actuales;
- la *secuenciación, selección y organización de contenidos*: la selección y organización de los contenidos está en función de los que sean más pertinentes para desarrollar las capacidades enunciadas en los objetivos (en documentos curriculares se dan excelentes orientaciones para esto), es decir, esos contenidos han de conseguir unos objetivos; y, obviamente, una secuencia bien pensada ayuda a lograr los objetivos específicos de la Unidad [40];
- los *criterios de evaluación* de la Unidad Didáctica: la evaluación es la relación de tareas y decisiones para valorar el proceso de enseñanza y aprendizaje (es *procesual*, se realiza a lo largo de todo el proceso; *formativa*, detecta problemas y facilita su corrección; y, *acumulativa o sumativa*, dimensión social en la que el profesor califica el proceso con una nota).

El *proceso evaluativo* tiene muchos aspectos que afectan tanto al alumno como al profesor. A continuación se describen algunos de ellos:

[40] El libro presenta un cuadro muy interesante con algunos contenidos actitudinales que propone un Decreto del Ministerio de Educación en España. Por lo importante que son y lo poco conocidos de este tipo de objetivos se transcriben textualmente: "1. Incorporar los lenguajes de la matemática a la forma de proceder habitual. 2. Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas y realizar operaciones matemáticas. 3. Disposición favorable a la realización correcta de las tareas, revisión y mejora del resultado de cualquier operación o problema. 4. Sensibilidad y gusto por la presentación ordenada y clara del proceso seguido y de los resultados obtenidos en problemas y cálculos. 5. Cuidado y precisión en cálculos y usos de los instrumentos de medida. 6. Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda y mejora de soluciones a los problemas. 7. Interés y respeto por las estrategias y soluciones a problemas distintas de las propias. 8. Valoración de la incidencia de los nuevos métodos tecnológicos para el tratamientos de la información y la representación gráfica". Ibid., p. 205.

- *qué evaluar*, se pueden distinguir varias categorías. Dimensiones *según el campo*: conceptuales (hechos, conceptos, estructuras conceptuales o teorías) o procedimentales (destrezas, razonamientos, estrategias o métodos); o según el *tipo de conducta*, (utilizar, argumentar, justificar o ejecutar) [41];
- *cuándo y cómo evaluar* mediante un registro sistemático que pasa por tres grandes etapas: la *inicial*, detecta conocimientos previos en el alumno; la *de seguimiento*, es la más extensa en el tiempo, el profesor registra la información mediante dos funciones, el diagnóstico del aprendizaje y la retroalimentación de la gestión de la enseñanza; y, la que se da *al término* de la Unidad Didáctica, por la diferenciación entre los objetivos necesarios a alcanzar en esta Unidad y los que seguirán consolidándose en otras unidades.

Hasta aquí, se han reconocido los criterios y decisiones que orientan la selección concreta de objetivos, contenidos, actividades y formas de evaluación; ahora, de modo más detallado y con implicación en nuevas decisiones se revisarán *las tareas para la construcción y gestión* de la Unidad Didáctica.

La Unidad Didáctica (10 a 14 horas) se organiza en *varias fases* que pueden solaparse en el tiempo, la *de motivación y exploración* (1 ó 2 horas), la *de desarrollo* (6 a 8 horas) y la *de consolidación y ajuste de ritmos* (3 ó 4 horas). Desglose metodológico que hace referencia a un proceso de enseñanza que tiene en cuenta un aprendizaje significativo.

Se pueden considerar las siguientes *tareas para la construcción y gestión* de la Unidad Didáctica:

- selección de los *objetivos, según su amplitud*, generales y específicos; *según el campo*, conceptuales, procedimentales y actitudinales;
- selección de *actividades de aula y recursos*, acompañadas del contexto, intenciones y comentarios, ya que la misma actividad puede tener diversos usos. Las actividades se incluyen en alguna de las siguientes *fases*: la *de motivación y exploración inicial* de conocimientos previos, se recuerdan conceptos, se estimula la motivación, etc.; la *de desarrollo de nuevas ideas*, lleva a sacar conclusiones para conceptuar las nociones fundamentales; y, por último, la *de consolidación y ajuste de ritmos*, actividades para

[41] En Ibid., p. 208-209, los cuadros 4 y 5 desglosan los aspectos a evaluar.

la casa y para clase con diversas intenciones, unas consolidarán los conocimientos avanzados y otras insistirán en conceptos básicos, teniendo en cuenta la diversidad del aprendizaje de los alumnos;

- *gestión*, en cada sesión el docente perfila detalles metodológicos, concreta tiempos aproximados, etc. "El *cuaderno del profesor* es el documento de registro sistemático de las tareas previstas y el documento en el que se resumen conclusiones y se adoptan decisiones para rectificar en la próxima unidad o en el próximo curso" [42]; es decir, conviene que se base en el registro de lo previsto para una clase y en los resultados *a posteriori*.

Al final del capítulo VIII del libro, Rico ejemplifica cada uno de los momentos de la composición de dos Unidades Didácticas, una sobre la *proporcionalidad con magnitudes directas* y otra sobre la *proporcionalidad con magnitudes geométricas*, que el lector interesado puede consultar y enriquecerse con el contenido.

2.4. La función en Unidades Didácticas

2.4.1. Didactificación de la noción de función

La Didáctica de la Matemática es el estudio de la evolución de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y unos alumnos, con el fin de optimizar los modos de apropiación de este saber por el sujeto. El proceso de transposición didáctica se encuentra insertado en el polo epistemológico del proceso de enseñanza y aprendizaje [43].

Las fases del proceso de *transposición didáctica,* empezando por el saber científico y llegando al saber a enseñar, son las siguientes [44]:

- el "texto del saber a enseñar" se presenta en los programas oficiales totalmente objetivado, descontextualizado, destemporalizado, despersonalizado; allí, los conocimientos matemáticos son *"objetos a enseñar";*

[42] RICO, Luis, p. 227; y, en la p. 229 aparece un modelo de formato para las anotaciones del profesor.
[43] Cfr. RUIZ HIGUERAS, Luisa (1998). *La didactificación de un objeto matemático. El caso de la noción de función*. Este trabajo es una parte de su tesis doctoral (1993).
[44] Cfr. RUIZ Higueras, Luisa (2004). *La transposición didáctica: del saber científico al saber enseñado*, p. 4-5.

- los nuevos "objetos a enseñar" son transformados por el profesor en "*objetos de enseñanza*", es decir, éste los recontextualiza apoyándose en los conocimientos previos de los alumnos;
- en este contexto, el alumno interioriza los "objetos de enseñanza"; y, esos conceptos toman el status de *herramientas para resolver problemas* de la actividad matemática;
- la actividad matemática del alumno se transforma en un nuevo "saber matemático" reconocido, cuando, a través de un esfuerzo de abstracción del contexto en el que lo ha utilizado como herramienta, se le llega a dar el status de "*objeto del saber matemático*" al descontextualizarlo y despersonalizarlo.

Dentro de este marco teórico de la transposición didáctica, Ruiz Higueras analiza las *transformaciones que experimenta la noción de función como objeto matemático* al ser introducida en la enseñanza secundaria; ella afirma que "los procesos de transposición didáctica originan relaciones institucionales específicas que condicionan las concepciones de los estudiantes. Parte de los sesgos, obstáculos y limitaciones de los aprendizajes logrados por los alumnos pueden explicarse por la índole de los significados institucionales realmente presentados en clase" [45].

En el estudio de Ruiz Higueras se muestran *los efectos de la transposición didáctica* sobre la noción de función:

- al poner en evidencia el *fenómeno de ilusión de transparencia* [46] del "saber enseñado";
- y, al llegar a identificar *disfuncionamientos de los saberes escolares* [47];

También se analiza el *tratamiento de la noción de función* en los programas oficiales de enseñanza secundaria de España y en las correspondientes clases de matemática, lo cual "ha permitido estudiar la progresión oficialmente establecida para los saberes a enseñar en estos programas y la estructuración que de ella hacen los profesores en sus clases" [48]. A continuación se recogen algunas observaciones de Ruiz Higueras:

---

[45] RUÍZ HIGUERAS, Luisa (1998). *La didactificación de un objeto matemático. El caso de la noción de función,* p. 266.
[46] "Fenómeno descrito por Chevallard (1991, p. 43) por el que el saber enseñado se considera (en el sistema de enseñanza) naturalmente identificado con el saber científico". En Ibid*.*, p. 267, nota 1.
[47] Los cuales se detectan al observar la epistemología artificial creada por el sistema de enseñanza que conduce en algunas ocasiones a una ruptura epistemológica con el saber científico y a un distanciamiento entre el "saber a enseñar" y el "saber enseñado".
[48] Ibid*.*, p. 267.

- la noción de función se estudia en los *programas oficiales* de modo progresivo, la primera vez se presenta de manera sencilla, su conocimiento se va ampliando a través del estudio de las funciones de variable real, también, al ser utilizada como herramienta básica en álgebra y en otros temas de educación secundaria; la concepción de función que inducen los programas está basada en la de aplicación entre conjuntos numéricos, por tanto se distinguen claramente el dominio y el rango de una función [49];
- la noción de función afín se estudia en los *apuntes de los estudiantes* [50], donde se observa una dicotomía del saber, el profesor se encarga de la teoría y el alumno de la práctica; la noción de función es explicada como aplicación entre conjuntos numéricos y las actividades realizadas en clase olvidan esta noción y se centran en los cálculos algorítmicos del dominio e imagen de las funciones [51]; y así, la "novedad" de la noción de función se coloca en "continuidad" con los ejercicios rutinarios de ecuaciones e inecuaciones.

"La enseñanza ha deformado *el objeto función* adaptándolo fuertemente a sus necesidades evaluativas, rompiendo epistemológicamente con los problemas y contextos a los que estuvo ligada esta noción desde su nacimiento"[52]: la noción de variabilidad y cambio, en las que fórmulas y gráficas adquieren su funcionalidad. En los apuntes de clase aparece no sólo la definición de función, sino la de dominio, imagen, gráfico y operaciones con funciones, de forma que estas definiciones cambian totalmente el lugar de herramientas (para la comprensión de la noción principal) al de ser objetos del saber matemático.

La profesora Ruiz Higueras dedica su tesis doctoral al estudio de *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico* [53], y realiza un análisis didáctico bien completo del concepto de función en tres aspectos:

- estudio de su *génesis epistemológico-histórica*;

[49] En la década de los 70, la noción de función como objeto a enseñar se coloca en el centro de los contenidos matemáticos a ser enseñados y adquiere un fuerte reconocimiento como saber incuestionable. Cfr. Ibid., p. 273.

[50] Los cuales son una aproximación del saber enseñado en clase por el profesor. Ruiz Higueras afirma lo que sigue: "Para aproximarnos al saber enseñado, hemos utilizado los apuntes tomados por los alumnos en clase. (…), constituyen uno de los posibles dispositivos de observación del funcionamiento del sistema didáctico (…) Nos ha permitido estudiar, si bien de un modo indirecto, el saber que pone en funcionamiento el profesor en sus clases y la actividad matemática de los alumnos". Ibid., p. 276.

[51] Se pone en evidencia el efecto *Topaze,* el cual está caracterizado porque la respuesta del alumno está determinada de antemano. Cfr. Ibid., p. 280.

[52] Cfr. Ibid., p. 282.

[53] Cfr. RUIZ HIGUERAS, Luisa (2004). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*.

- análisis del *significado que recibe en la enseñanza*;
- y, *concepciones de los alumnos*.

Del análisis de las concepciones y obstáculos epistemológicos relacionados con la *evolución histórica* de la noción de función, la profesora obtiene las siguientes conclusiones:

- *identificación de fenómenos sujetos al cambio*: relación entre magnitudes variables. El paso de datos tabulados a la búsqueda de regularidades implica un cierto "instinto de funcionalidad";
- *razón o proporción*, excelente herramienta para realizar el análisis cuantitativo de lo real;
- *gráfica* (visión sintética);
- *curva* (visión analítico-geométrica);
- *expresión analítica de la dependencia entre variables* que comienza con el nacimiento del álgebra;
- *correspondencia arbitraria*, aplicación;
- *función como terna (f, x, y)*, remarca la concepción estática del par (x, y).

Del análisis de las concepciones y obstáculos epistemológicos relacionados con el *significado que recibe en la enseñanza* la noción de función, obtiene las siguientes conclusiones:

- *expresión algebraica*, fórmula;
- *gráfica* representada en unos ejes cartesianos;
- *aplicación entre conjuntos*.

Del análisis de las concepciones y obstáculos epistemológicos relacionados con *las concepciones de los alumnos* sobre la noción de función, obtiene las siguientes conclusiones:

- *algoritmo de cálculo*, operación entre números;
- *expresión algebraica*, fórmula, ecuación, expresión con números y letras;
- *gráfica* (construida a partir de una fórmula), con fuerte asociación entre la expresión algebraica y gráfica;
- *ideograma* (algebraico y gráfico);

- *correspondencia entre conjuntos numéricos*;
- *transformación,* cambio entre cantidades variables.

Ruiz Higueras observa que "el sistema de enseñanza en el que se encuentran nuestros alumnos, no promueve el estudio y análisis de la *variabilidad* de fenómenos sujetos al cambio, donde la función encontraría una especial significación estrechamente ligada a sus orígenes epistemológicos. (…) Existe, pues, *una ruptura epistemológica entre la concepción,* adoptada por los manuales o profesores *para introducir* el concepto, y la que normalmente utilizará de forma más o menos implícita *en el desarrollo* del temario. Se presenta aquí un proceso inverso al seguido en la génesis histórica del concepto."[54].

La enseñanza escolar ha configurado el objeto función de manera determinada, adaptándolo a sus necesidades. Las diferentes concepciones sobre función en los alumnos tratan de ejercicios de rutinas y procedimientos casi algorítmicos, consecuencia del contexto de la enseñanza actual, centrado principalmente en la parte algebraica (más fácil de evaluar). De esta forma, se pone de manifiesto cómo el sistema didáctico produce restricciones sobre cada uno de sus elementos constitutivos (alumnos, profesor y saber a enseñar) y sobre las relaciones de éstos entre sí.

2.4.2. Didactificación de la función afín

Hay bastantes investigaciones en didáctica de la matemática y amplia bibliografía acerca de las funciones algebraicas en general, polinómicas, exponencial, etc.; sin embargo, del caso concreto de función afín hay muy pocas y están orientadas principalmente al estudio de la ecuación de la recta. En la búsqueda de bibliografía para la investigación en curso no se han encontrado trabajos de investigación con propuestas concretas de Unidades Didácticas sobre la función afín.

El programa del Ministerio de educación para 9º grado de Básica III es muy escueto al presentar el objetivo de función afín (cfr. ANEXO 2); los textos de matemática de ese curso y tema (cfr. 3.2.1.1.) recogen las tendencias analizadas por Ruiz Higueras respecto al *significado que recibe en la enseñanza* y, como consecuencia, con *las concepciones de los alumnos*.

[54] Ibid., p. 14.

Los profesores, en muchos casos, siguen enseñando este tema con los parámetros "tradicionales", el docente se encarga de la parte teórica y los alumnos de la práctica (ejercicios y problemas), se hace énfasis en aquellos aspectos del tema que pueden ser evaluados y se olvida la génesis histórica de concepto de función afín.

A continuación se recogen *sugerencias concretas para la elaboración de Unidades Didácticas sobre función afín,* algunas también podrían ser utilizadas para la elaboración de documentos con otros objetivos conceptuales:

- ❖ utilizar la *noción de variabilidad y cambio* como contexto y fundamento de la enseñanza del tema; poner énfasis en la relación entre las variables, independiente y dependiente; apoyarse en el concepto de razón o proporción;
- ❖ buscar una *organización cognitiva del contenido* que facilite un aprendizaje significativo, que tenga en cuenta los conocimientos previos del alumno y que prevea las exigencias de la noosfera en la enseñanza;
- ❖ trabajar la *traducción flexible en los diversos lenguajes matemáticos* (verbal, tabular, gráfico y algebraico) de los conceptos básicos de función afín (pendiente y ordenada en el origen); llevar a cabo una interpretación adecuada de gráficos;
- ❖ recoger la *contextualización* del nuevo concepto en los fenómenos cotidianos en los que aparece, y también, las *conexiones* con otros temas de matemática o materias escolares;
- ❖ promover tanto el *razonamiento reflexivo* a lo largo del aprendizaje del tema, como la *expresión oral y escrita* de los alumnos;
- ❖ tener en cuenta los *obstáculos, dificultades y errores* de los alumnos;
- ❖ desarrollar en los alumnos las *habilidades procedimentales;*
- ❖ realizar una *evaluación de calidad* que tenga en cuenta los parámetros actuales, que sea fruto de una enseñanza de calidad y de una evaluación continua.

La calidad del proceso de enseñanza y aprendizaje llevará al profesor a evitar:

- ❖ centrarse en el *aspecto algorítmico* del contenido; Ruiz Higueras explica el hábito de enseñanza al pasar a resolver ejercicios de cálculo (dominio y rango) después de impartir el contenido teórico acerca de función afín;

- trabajar ejercicios sin *ninguna referencia a los fenómenos cotidianos* y a la *noción de variación y cambio*;
- adaptar su enseñanza al *requisito de evaluación,* que lleva a un aprendizaje memorístico y algorítmico.

Las sugerencias de la autora de este trabajo de especialización se apoyan en las investigaciones realizadas por otros muchos estudiosos de Didáctica de Matemática, especialmente latinoamericanos [55]. A continuación se presenta un amplio conjunto de esas referencias respecto a las sugerencias recién señaladas.

Noción de variabilidad y cambio como contexto y fundamento en la enseñanza del tema; relación entre la variable independiente y dependiente; apoyarse en el concepto de razón o proporción:

- DOLORES FLORES, Crisólogo, *El desarrollo del pensamiento variacional con estudiantes universitarios,* en *Actas de la décimo cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 14), México, 2001, pp. 337-345.
- SALINAS LÓPEZ, Ciria, *Un estudio sobre la evolución de las ideas variacionales en los cursos preparatorios al cálculo,* en *Actas de la décimo cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 14), México, 2001, pp. 552-555.
- DOLORES FLORES, Crisólogo, *Concepciones alternativas que, referentes al comportamiento variacional de funciones, manifiestan profesores de bachillerato,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), México, 2003, pp. 450-456.

Organización cognitiva del contenido que facilite un *aprendizaje significativo,* que tenga en cuenta los conocimientos previos del alumno y que tenga presentes los requerimientos que surgen en la enseñanza a través de las exigencias de la noosfera:

- BRAVO DE LAS CASAS, Eduardo Ramón, *Enseñanza significativa de la matemática en las carreras de ciencias técnicas,* en *Actas de la décimo cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 14), Cuba, 2001, pp. 281-286.

---

[55] BEITÍA, Beitía, Germán Luis (2001). *Algunas tendencias de la Matemática educativa en Latinoamérica*.

- FARFÁN, Rosa María, Asuman Oktac y Andrés Rivera, *El obstáculo del formalismo y los modos de pensamiento en el caso de transformaciones lineales,* en *Actas de la décimo cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 14), México, 2001, pp. 353-361.
- FARFÁN MÁRQUEZ, Rosa María, *Ingeniería didáctica. Un ejemplo construido para la función* 2^x*,* en *Actas de la décimo cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 14), México, 2001, pp. 408-415.
- BEYER, Walter, *El significado en matemática: un problema didáctico,* en *Actas de la décimo cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 14), Venezuela, 2001, pp. 583-589.
- MARTÍNEZ MARTÍNEZ, Dámasa, *La significatividad didáctica para la aprehensión del concepto de función en la carrera licenciatura en economía,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), Cuba, 2003, pp. 271-277.
- RUIZ MÁRQUEZ, David Warren, *Uso de la tecnología en un contexto constructivista. El caso del cálculo de varias variables,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), México, 2003, pp. 730-734.
- RODRÍGUEZ PONCE, María del Carmen., *Compartir significados sin esperar milagros,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), Cuba, 2003, pp. 760-764.

Traducción flexible en los diversos lenguajes matemáticos (verbal, tabular, gráfico y algebraico) de los conceptos básicos de función afín (pendiente y ordenada en el origen); interpretación adecuada de gráficos:

- GATICA, Stella Nora, *Observaciones sobre las soluciones a una tarea de inecuaciones lineales en dos variables realizadas por estudiantes de secundaria,* en *Actas de la décimo cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 14), Argentina, 2001, pp. 216-224.
- BENÍTEZ PÉREZ, Alma Alicia, *La escala como factor fundamental para construir la expresión algebraica. El caso de la recta,* en *Actas de la decimo cuarta Reunión*

Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 14), México, 2001, pp. 428-431.

- DOLORES FLORES, Crisólogo, *El análisis de funciones y las concepciones alternativas que de ese proceso se generan,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), México, 2003, pp. 40-45.
- CANTORAL, Ricardo y Gisela Montiel, *Visualización y pensamiento matemático,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), México, 2003, pp. 694-701.

Contextualización del nuevo concepto en los fenómenos cotidianos en los que aparece, *conexiones* con otros temas de matemática ú otras materias escolares:

- CANTORAL, Ricardo, *Sobre la articulación del Discurso Escolar y sus Efectos Didácticos*, en *Actas de la décimo cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 14), México, 2001, pp. 64-67.
- GATICA, Stella Nora, *Observaciones sobre las soluciones a una tarea de inecuaciones lineales en dos variables realizadas por estudiantes de secundaria,* en *Actas de la décimo cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 14), Argentina, 2001, pp. 216-224.
- CORDERO, Francisco, Bronisuawe Czamocha, Leonora Díaz, Verónica Díaz y Álvaro Poblete, *El papel de la sociocultura en la didáctica de la matemática,* en *Actas de la décimo cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 14), México-EUA-Chile, 2001, pp. 618-625.
- CAMARENA GALLARDO, Patricia, *La matemática en el contexto de las ciencias: fase didáctica,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), México, 2003, pp. 46-53.
- TORRES PAGÁN, Leonardo, *Las matemáticas integradas en contexto,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), Puerto Rico, 2003, pp. 340-345.

Promover los *procesos de razonamiento reflexivo* a lo largo del tema, así como la expresión oral del aprendizaje:

❖ SAAVEDRA, Carlos y Patricio Rosen, *Modelo didáctico alternativo para la ecuación de la recta,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), México, 2003, pp. 80-86.

❖ COLMENÁREZ TOVAR, Dones Gregorio y Martín Andonegui Zabala, *Análisis de los procesos deductivos en Geometría,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), Venezuela, 2003, pp. 140-146.

❖ CRESPO CRESPO, Cecilia y Christiane Ponteville, *El concepto de función: su comprensión y análisis*, en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), Argentina, 2003, pp. 235-241.

Tener en cuenta los *obstáculos, dificultades y errores* de los alumnos:

❖ PÉREZ ZÁRATE, Juana Inés, *Acerca de las relaciones entre errores algebraicos y obstáculos epistemológicos,* en *Actas de la décimo cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 14), México, 2001, pp. 311-317.

❖ VILLALOBOS MARTÍNEZ, Amelia, *Identificación de obstáculos en la construcción de gráficas de funciones,* en *Actas de la décimo cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 14), México, 2001, pp. 396-399.

❖ LESTÓN IELMINI, Patricia. y Daniela Cecilia Veiga Tomatis, *Los primeros errores en la formación docente,* en *Actas de la decimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), Argentina, 2003, pp. 669-675.

❖ PERALTA GARCÍA, Julia Xochilt y José Luis Soto Munguía, *Dificultades para articular los registros gráfico, algebraico y tabular: el caso de la función lineal,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), México, 2003, pp. 720-727.

Desarrollo de las *habilidades matemáticas* en los alumnos:

❖ VELÁSQUEZ BUSTAMANTE, Santiago Raminro, Carlos Flores, Gerardo García, Enrique Gómez y Hermes Hesiquio, *Desarrollo de habilidades matemáticas y formación de profesores,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), Universidad autónoma de Guerrero y Centro de Investigación y desarrollo educativo, 2003, pp. 627-634.

- FERRARI ESCOLÁ, Marcela y Gustavo Martínez, *Construcción de funciones con calculadoras graficadoras,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), México, 2003, pp. 710-715.

Realizar una *evaluación de calidad* que tenga en cuenta los parámetros actuales y que sea fruto de una *enseñanza de calidad*, de una evaluación continua a lo largo de la Unidad Didáctica:

- GUZMÁN, Ismenia, *Reflexión sobre la calidad de la actividad matemática en el aula*, en *Actas de la décimo cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 14), Chile, 2001, pp. 22-25.
- CASTILLO ALFARO, Thais, *Diseño de instrumentos de evaluación de los aprendizajes*, en *Actas de la decimo cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 14), Costa Rica, 2001, pp. 100-106.
- ROJAS TORRES, Ana Cecilia y Martín Andonegui Zabala, *Evaluación de la enseñanza de la geometría utilizando un software asistente de geometría,* en *Actas de la decimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), Venezuela, 2003, pp. 133-139.
- CALDERÓN ARIOSA, Regla Margarita y Beatriz Deiros Fraga, *Evaluación del aprendizaje de las matemáticas,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), Cuba, 2003, pp. 329-333.
- JUÁREZ LÓPEZ, Juan Antonio, *La comprensión del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), México, 2003, pp. 472-478.

Otros documentos relacionados con el estudio que se realiza:

- AZCÁRATE, C. y J. Deulofeu (1990). *Funciones y Gráficas*, Madrid, Editorial Síntesis.
- NCTM (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática,* Primera edición en castellano traducida por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

- FARFÁN, Rosa María, *Tradiciones y paradigmas de investigación en matemática educativa,* en *Actas de la décimo cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 14), México, 2001, pp.131-140.
- PÉREZ YÁNEZ, Jenny María y Martín Andonegui Zabala, *Análisis de los contenidos geométricos de los libros de texto de matemática de educación básica a la luz de los planteamientos teóricos del modelo de Van Hiele,* en *Actas de la decimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), Venezuela, 2003, pp. 154-160.

CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

3.1. Tipo de investigación [56]

Las investigaciones educativas han proliferado mucho desde la segunda mitad del siglo XX. En el área de Didáctica de la Matemática comenzaron en los años 80, ha habido descubrimientos interesantes y queda aún mucho por hacer. Este trabajo de investigación intenta ser una pequeña contribución en la línea de la investigación en Didáctica de la Matemática en Venezuela [57] y que podría ser ampliado en próximos estudios.

En cualquier trabajo de esta índole es importante *una buena planificación* de lo que se quiere conseguir, es por ello que en este capítulo se explica cuál ha sido la metodología investigativa para lograr los objetivos propuestos al inicio de esta experiencia didáctica (cfr. 1.3.).

Se explican a continuación los diversos aspectos necesarios para entender el marco teórico-metodológico donde se inserta (como referencia investigativa), todo el diseño que se ha trabajado.

---

[56] Cfr. GÓMEZ-CHACÓN, Inés María (2005). Apuntes y Guías de los cursos de *Formación de Docentes* e *Investigación en Didáctica de las Matemáticas*; GIMENO SACRISTÁN, José (1983), *Planificación de la investigación educativa y su impacto en la realidad*; y, PRUZZO, Vilma y Graciela Di Franco (2003). *Paradigmas y enfoques metodológicos de la investigación educativa*.

[57] A través de los artículos recogidos en las Actas de las RELME, se observan diversos grupos de investigación en el área de didáctica de matemática en el país (Distrito Federal, estados Lara, Mérida y Guayana).

3.1.1. Investigación – Acción [58]

Este tipo de trabajos investigativos son *propuestas educativas para mejorar las condiciones del entorno donde se desenvuelve el investigador-docente*, el cual está inmerso en la experiencia educativa y además:

- es muy utilizada en países y ambientes cuya *práctica educativa es bastante precaria* porque es un medio realmente eficaz para que se produzcan las mejoras deseadas en el entorno escolar;
- la *reflexión del investigador* en estos casos es muy viva, porque la cercanía –y en la mayoría de los casos, la identificación– entre el sujeto que lleva a cabo la investigación y el facilitador del proceso educativo es grande.

3.1.2. Metodología interpretativo-cualitativa [59]

La orientación metodológica *cualitativa cognitiva,* muy utilizada en los últimos decenios, busca *comprender a fondo los fenómenos didácticos* para señalar las causas que los producen y proponer soluciones pertinentes para lograr la mejora efectiva en el proceso educativo.

Las reflexiones acerca de los *procesos cognitivos* presentes en toda actividad de enseñanza y aprendizaje es de radical importancia; por esto, para avanzar en este tipo de investigaciones es esencial el esfuerzo por comprender qué sucede en los sujetos involucrados en el proceso educativo, qué consecuencias tiene una determinada situación didáctica, cómo afecta el entorno que rodea a los involucrados en el ciclo didáctico, y otros muchos aspectos.

El *conjunto de características que*, respecto a la matemática y al proceso educativo, *toma en cuenta esta metodología* se describen en los siguientes puntos:

- se basa en una *epistemología centrada en el sujeto*, por lo que los contenidos matemáticos se presentan en relación con la razón de los participantes del proceso

---

[58] Cfr. ELLIOT, John (1997). *El cambio educativo desde la investigación-acción*; y, KEMMIS, J. y Robin McTaggart (1988). *Cómo planificar la investigación-acción*.

[59] Cfr. GÓMEZ-CHACÓN, Inés María (1998). *Una metodología cualitativa para el estudio de las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas*; JIMENÉZ, B. (2002), *Metodologías orientadas a la comprensión y la interpretación*.

educativo; se colocan a los sujetos en el centro de la actividad de construcción del conocimiento, y el *centro del proceso* de enseñanza y aprendizaje es el alumno;

- la *visión de la matemática* –principalmente– es el ser creación de la razón de los participantes; desde los conocimientos previos se van construyendo los nuevos conocimientos matemáticos en un proceso mental de asimilación con calidad;
- la *visión del aprendizaje* está acompañada del cognitivismo, aprender es procesar la información, por lo que la construcción del aprendizaje significativo para el alumno adquiere gran importancia;
- la *visión de la enseñanza* tiene en cuenta que, los conceptos matemáticos son difíciles de captar en su totalidad; el proceso de enseñanza ha de ser creativo, metódico y basado en un lenguaje apropiado para expresarse; el profesor propicia su rol de facilitador; y, adquieren importancia los errores como fuente de aprendizaje.

3.1.3. Estructura general de la investigación

El objetivo planteado requirió la realización de *dos estudios interdependientes y consecutivos cronológicamente*. El *primer estudio* consistió en la documentación, reflexión y diseño de una Unidad Didáctica sobre función afín, así como la validación del documento escrito como material didáctico, lo que se llevó a cabo a través de diversas formas (cfr. 3.2.); y, el *segundo estudio* consistió en rediseñar la Unidad Didáctica después de una profunda reflexión sobre las prácticas educativas y la aplicación de la experiencia didáctica al grupo principal de estudio (cfr. 3.3.).

Las próximas páginas tratan de dar respuesta –con un ejemplo concreto y cercano– a algunas preguntas básicas que se plantea el docente al diseñar sus propias Unidades Didácticas: ¿qué son? ¿cuáles son las fases del proceso de elaboración? ¿qué aspectos conviene tener claro antes de desarrollarla? ¿cuáles son sus elementos constitutivos? ¿cómo mejorarla a partir de su experimentación en el aula? ¿cómo evaluarlas? A estas inquietudes se propondrán soluciones para el caso concreto del tema de función afín.

3.2. Metodología de la Primera Fase

Esta Primera Fase del trabajo de investigación *se compone de una serie de subtareas*: localizar las fuentes documentales más apropiadas, aplicación de la Unidad Didáctica a diversos grupos de alumnos, utilizar los instrumentos para la recogida de la información, analizar los resultados obtenidos, entre otras.

El diseño realizado de la Unidad Didáctica culminó después de un proceso enriquecedor de *recolección de fuentes documentales*, del *diseño de la Unidad Didáctica en su primera versión*, de la *doble validación del documento* a través de la *aplicación* de la misma (a varios grupos de alumnos), y por el *análisis de las respuestas al cuestionario* evaluativo redactado por los docentes involucrados en el proceso (cfr. 3.2.3.2.) [60].

3.2.1. Documentación y reflexión en orden al diseño de la Unidad Didáctica

Las pautas dadas por Rico (cfr. 2.3.8.) [61], fueron puntos de apoyo para llevar a cabo esta etapa del trabajo. Como la Unidad Didáctica es el lugar de encuentro entre la planificación educativa y la práctica docente, antes del diseño de la Unidad Didáctica sobre función afín, se abordaron las siguientes *tareas*:

- *revisar, analizar y reflexionar* con detenimiento la valiosa información que se consiguió acerca del tema a desarrollar (cfr. 3.2.1.1.);
- llevar a cabo una *selección razonada* de todo lo contenido en esos documentos, en orden al contexto particular en el que se utilizaría;
- componer el *diseño general del trabajo* bajo la óptica de las prioridades establecidas por los objetivos, contenidos, metodología y evaluación.

Como la programación de una Unidad Didáctica tenía que estar enmarcada en el *proyecto del centro educativo,* en cada aplicación de la Primera Fase de la investigación se tomó en cuenta este aspecto curricular.

---

[60] Es necesario promover en los docentes venezolanos el hábito de preparar con calidad las clases a impartir, que cada vez sean más los docentes que elaboren sus propias Unidades Didácticas siguiendo criterios ya experimentados (cfr. 2.2 y 2.3) sin que el texto escolar elegido sea su único recurso didáctico.

[61] También el material entregado, en los cursos impartidos en la USB (2004-2005), por los profesores MARÍN (cfr. 3.2.1.1), GIMENÉZ (cfr. 3.2.1.1) y GÓMEZ-CHACÓN (cfr. 3.1.) fue una guía eficaz para el logro final de este trabajo de investigación en su segunda fase.

Además, se tuvieron presentes las *decisiones necesarias* para llevar a buen término el desarrollo de la Unidad Didáctica:

- la *selección de objetivos generales y específicos* de la Unidad Didáctica, se estableció tanto el contenido curricular a desarrollar –análisis de la función afín para 9º grado de Básica III–, así como las bases teóricas en las que fundamentar el tema –una metodología constructivista bajo la perspectiva del aprendizaje significativo–;
- la *secuenciación, selección y organización de contenidos* más pertinentes para desarrollar en los alumnos las competencias enunciadas en los objetivos propuestos en la Unidad Didáctica (cfr. ANEXO 1);
- los *criterios de evaluación* del aprendizaje de los alumnos para valorar la calidad de la Unidad Didáctica como recurso en el proceso de enseñanza en sus fases: *diagnóstica* o de los conocimientos previos; *procesual* o la realizada a lo largo de todo el proceso; *formativa*, la que detecta problemas y facilita su corrección; y, *acumulativa o sumativa*, en la que el profesor califica el proceso con una nota (cfr. 3.2.4).

3.2.1.1. Localización de fuentes documentales

Se procedió a la localización de fuentes documentales que orientaran el trabajo de diseño de la Unidad Didáctica, básicamente éstas se estructuran en tres bloques [62]:

- la fuente básica de constante referencia fue el *objetivo n. 17, Analizar las características de la función afín*, del programa oficial vigente de la asignatura de Matemáticas para 9º grado (cfr. ANEXO 2);
- los *libros de texto escolares* y otros documentos similares que desarrollaban el tema de función afín [63]: en ellos se observó y analizó la secuencia del contenido, las tendencias metodológicas y las teorías de enseñanza y aprendizaje subyacentes en la presentación del tema;

---

[62] Los documentos analizados en el capítulo 2 constituyeron un punto de referencia constante para el diseño y redacción de la Unidad Didáctica.

[63] Los datos de los libros de texto y documentos más consultados son: AMELII, María Rita y José Lemmo (2002). *Matemática 9*; ARDILA, V.H. y B.H. Torres (2001). *Olimpiadas matemática 9;* ARENAS DE ARIAS, G., (1998). *Matemática 9º*; ARIAS, José María y Ildefonso Maza (1998). *1 Bachillerato Matemáticas*; HINDS J. (2002). *Matemática 9. Edición especial para el docente*; Sociedad Andaluza de Profesores de Matemática, *Definición de funciones afines*; Ibid., *Problemas sobre la función afín*.

- otros documentos de referencia de diversos temas de didáctica de matemática [64].

La reflexión sobre el extenso contenido de estos documentos fue el punto de partida para el diseño de la Unidad Didáctica en todos sus aspectos.

3.2.1.2. Diseño de la Unidad Didáctica sobre función afín (primera versión)

En la elaboración de la primera versión de la Unidad Didáctica se recorrieron las siguientes *tareas de redacción y diseño* [65]:

- *de los objetivos*, *según su amplitud* –los generales y los específicos–; y, *según el campo* –conceptuales, procedimentales y actitudinales–;
- *de las actividades de aula seleccionadas* y de los comentarios necesarios a cada una de ellas –contexto, intenciones, metodología, evaluación, rol del docente, etc. –;
- *ubicación de las actividades en cada una de las fases* en las que se organiza una Unidad Didáctica –fases que pueden solaparse en el tiempo–, *la de motivación y exploración inicial*; *la de desarrollo de nuevas ideas*; y, *la de consolidación y ajuste de ritmos* [66];
- la parte final, o el *modo de evaluar el aprendizaje* de los alumnos antes, durante y al finalizar la aplicación de la Unidad Didáctica [67]; se incentivó el aprendizaje de los alumnos a través de sus propios errores (cfr. 2.3.5 y 3.2.4.3).

---

[64] MARÍN, Margarita (2004). Apuntes tomados y guías entregadas al dictar el curso de *Currículo en Matemática;* GIMÉNEZ, Joaquín (2005). Apuntes tomados y guías entregadas al dictar el curso de *Evaluación en Matemática;* RUÍZ HIGUERAS, Luisa (2004). Apuntes tomados y guías entregadas al dictar los cursos de *Didáctica de las Matemáticas* y *Epistemología matemática I*; Universidad Abierta de Cataluña, *Test Autoevaluaciò Funció afí*; NCTM (2000). *Estándares de Álgebra para la etapa 6-8 y Estándares de Proceso*; y, UCAB (sin fecha). Material de Apoyo de los *Talleres de Capacitación docente*.

[65] Pauta importante para la redacción de la Unidad Didáctica fue el último capítulo de RICO, Luis, op. cit., p. 195-228.

[66] Las tareas realizadas hasta este momento fueron elaboradas en seis sesiones de trabajo por un equipo de cuatro docentes en ejercicio y estudiantes de la *Especialización en Didáctica de Matemática de Educación Secundaria* de la Universidad Simón Bolívar; éstas son: ALEGRÍA Rebeca, ESCOBAR Janet., GARCÍA Marta y MARTÍNEZ Yolanda. El final del trabajo conjunto terminó en *Una Unidad Didáctica sobre Función Afín* (diciembre 2004) para la evaluación de la asignatura *Currículo en matemática* dictada por la profesora Margarita Marín.

[67] El proceso de evaluación del aprendizaje se basó en teorías actualizadas sobre el modo de llevarlo a cabo: cfr. Rico 207-216; SANTOS, Leonor. (2004), *La evaluación del aprendizaje en Matemáticas: orientaciones y retos*; la prueba final fue redactada por la autora de este trabajo de grado, con esfuerzo e ilusión, para evaluar el aprendizaje del objetivo *Función Afín* en los dos grupos de alumnas de 9º grado (A y B) de la Unidad educativa *INCAP Los Samanes,* y, fue incluida en el trabajo de GARCÍA Marta (2005). *Una Evaluación sobre la Función Afín a 9º grado. Análisis cualitativo y cuantitativo de las pruebas* para la evaluación de la asignatura *Evaluación en Matemáticas* dictada por el profesor Joaquín Giménez.

Para el primer trimestre del 2005 se tenía redactada la primera versión de la Unidad Didáctica sobre función afín, y se procedió a la experimentación de la misma por un grupo de docentes cualificados (cfr. 3.2.2.).

3.2.2. Validación del documento escrito como material didáctico

La *experimentación o utilización del recurso didáctico en el aula* de clase es un medio empleado con frecuencia en la investigación educativa para validar las Unidades Didácticas, se procedió así para el caso de la Unidad Didáctica recién diseñada [68].

La autora de este trabajo y tres docentes más interesados en este recurso, lo utilizaron para explicar el tema de función afín a sus alumnos de 9º grado durante el curso escolar 2004-2005. Para lo cual, se reprodujo el material y se entregó a los profesores; éstos lo analizaron, lo asimilaron, procuraron adaptarlo al grupo de alumnos con el que trabajarían, y, en esta etapa de la aplicación del documento, la evaluación del aprendizaje fue determinada por cada docente para su grupo de alumnos. Durante el tiempo que duró la *gestión* de la Unidad Didáctica, cada uno de los docentes perfiló detalles metodológicos, concretó los tiempos de forma más aproximada y captó otros muchos aspectos en cada sesión.

3.2.2.1. Utilización del material y temporalización

Durante el curso escolar 2004-2005 la Unidad Didáctica sobre función afín en su primera versión fue aplicada por los cuatro profesores de matemática –estudiantes de la Especialización en Didáctica de la Matemática– a siete grupos de estudiantes de 9º grado –un total de 344 alumnos–, en los lugares donde ejercen su profesión docente. Este ciclo de clases se incluyó dentro de la programación del segundo lapso de una forma natural, y se analizó en cada caso, la propia práctica docente basada en el mismo documento; por supuesto, cada docente imprimió su huella a lo largo de todo el proceso e hizo más o menos énfasis en unas actividades y metodologías.

---

[68] Un ejemplo de este modo de validar está presente en el artículo GUINEO COBS, Gladys Elisa (2003). *Investigación – Acción: Una experiencia en Aula – Taller.*

El tiempo utilizado para impartir el contenido de la Unidad Didáctica varió según las previsiones, planificación y pericia de cada docente. En todos los casos se puso interés, esfuerzo y dedicación si se tiene en cuenta el número de horas semanales de matemáticas aprobadas por el Ministerio de Educación para 9º grado (tres horas académicas ó tres períodos de tiempo de 40 ó 45 minutos). La Unidad Didáctica se impartió en un lapso de tiempo considerable, de 5 a 6 semanas, el cual incluyó la evaluación.

3.2.2.2. Contexto y sujetos de la experiencia didáctica

A continuación se detallan las *Unidades Educativas* en las que se utilizó el material didáctico para explicar la función afín, los *grupos de alumnos*, los *docentes cualificados* que la aplicaron y las *fechas del calendario escolar* en las que se dictó el tema:

- Unidad educativa: *INCAP Los Samanes.* Profesora Marta García. *Grupos*: 9º grado A y B, con 25 y 19 alumnas respectivamente. *Duración*: seis semanas del segundo lapso, del 7 de febrero al 18 de marzo;
- Unidad educativa: Liceo *Gustavo H. Machado*. Profesora Janet Escobar. *Grupos*: 9º grado C y F, con 49 y 50 alumnos respectivamente. *Duración*: cinco semanas del segundo lapso, del 28 de febrero al 25 de marzo;
- Unidad educativa: Liceo *Gustavo H. Machado.* Profesor Osvaldo Gómez. *Grupo*: 9º grado D, de 44 alumnos. *Duración*: cinco semanas del segundo lapso, del 28 de febrero al 25 de marzo;
- Unidad educativa: Liceo *Gustavo H. Machado*. Profesor Iván López. *Grupos*: 9º grado A y B, de 46 y 48 alumnos respectivamente. *Duración*: cinco semanas del segundo lapso, del 28 de febrero al 25 de marzo;

Todas estas prácticas educativas se dirigieron a estudiantes de bajos recursos. Muy a menudo, este tipo de estudiantes presentan bastantes fallas en los conocimientos previos necesarios para transmitir los diversos temas de la asignatura de matemática. La primera Unidad Educativa es de enseñanza privada y la segunda de enseñanza pública. El gran número de alumnos en muchos de los grupos fue un reto grande para el docente respecto a los cambios de estrategias didácticas sugeridos en la Unidad Didáctica.

3.2.3. Otros instrumentos de validación de la Unidad Didáctica

3.2.3.1. Valoración de la Unidad Didáctica y de la Prueba final de evaluación

El documento didáctico *Una Unidad Didáctica sobre función afín* fue evaluado como trabajo final de la asignatura de *Currículo de Matemática* por la Profesora Margarita Marín, Doctora en Didáctica de la Matemática, profesora titular de la *Universidad de Castilla-La Mancha* (España) [69], con la máxima calificación [70].

Igualmente, el documento escrito *Una Evaluación sobre la Función Afín a 9º grado. Análisis cualitativo y cuantitativo de las pruebas* fue evaluado como trabajo final de la asignatura de *Evaluación de Matemática* por el Profesor Joaquín Giménez, Doctor en Didáctica de la Matemática, profesor titular de la *Universidad de Barcelona* (España) [71], con la máxima calificación [72].

3.2.3.2. Cuestionario para evaluar la Unidad Didáctica aplicada

Se elaboró un *cuestionario para la evaluación de las experiencias didácticas* (cfr. ANEXO 3 y 3.2.2.) que se estructuró en cuatro partes [73]:

- I. *Datos relacionados con la aplicación* o experimentación de la Unidad Didáctica;
- II. *Evaluación de la Unidad Didáctica* (experimentada o aplicada) por parte del profesorado;

---

[69] Autora de excelentes libros del área de Didáctica de la Matemática.

[70] La profesora del curso, durante sus clases explicó las pautas de Rico para la elaboración de Unidades Didáctica. Cfr. RICO, Luis, op. cit., p. 195-228.

[71] Autor de excelentes libros del área de Evaluación dentro de la Didáctica de la Matemática.

[72] En sus clases utilizó los criterios de una evaluación de calidad que expone RICO, Luis, p. 207-215.

[73] Mientras se estaba elaborando un cuestionario para la evaluación de la Unidad Didáctica diseñada y recién aplicada (cfr. 3.2.2.), llegó a las manos de la autora de este trabajo el cuestionario elaborado por la Profesora María Luz CALLEJO, Doctora en Didáctica de la Matemática, profesora titular del *Instituto de estudios pedagógicos Somosaguas* (IEPS) en Madrid (España). En el cuestionario se contenían de manera ponderada muchas de las preguntas que se deseaban formular y otras más. Se decidió utilizar este instrumento, ya validado por especialistas, *como parte* del cuestionario para la evaluación del documento didáctico y de sus diversas prácticas educativas. Cfr. CALLEJO, María Luz (1992). Op. cit., p. 27-30. Y, además, es autora de numerosas publicaciones en el área de Didáctica de la matemática, especialmente en la novedosa forma de hacer matemática llamada *Resolución de problemas.*

- III: *Evaluación de la Unidad Didáctica como recurso* para ser utilizado por el profesorado;
- IV: *Comentarios, sugerencias, recomendaciones y observaciones* por parte de estudiantes de la *Especialización en Didáctica*.

Las partes I y IV son originales de la autora de esta investigación, en cambio, las partes II y III pertenecen al cuestionario elaborado por la Profesora María Luz Callejo, el cual es fruto de su progresiva reflexión, de la práctica educativa de especialistas en didáctica y de muchos profesores de matemática de enseñanza obligatoria (o secundaria).

Las ricas experiencias de los docentes y alumnos fueron ocasión para una reflexión profunda del trabajo realizado hasta el momento en el aula de clase. Después de un *proceso de maduración* de esta breve pero intensa experiencia, los docentes contestaron el cuestionario (cfr. ANEXO 9: respuestas al cuestionario de uno de los profesores).

3.2.4. Evaluación del aprendizaje de los alumnos [74]

En las próximas páginas se trata de dar respuesta -con un ejemplo concreto y cercano- a algunas preguntas básicas que se plantea el docente respecto del *proceso evaluativo del aprendizaje* de sus alumnos: ¿qué evaluar? ¿cuándo y cómo evaluar? ¿para qué evaluar? ¿se evalúa al alumno ó para el alumno? A estas inquietudes se propondrán soluciones para el caso concreto del tema de función afín.

En la actualidad se comprende el aprendizaje como el establecimiento de relaciones con significado a partir de lo que cada uno sabe –el centro, es el estudiante, no son los contenidos matemáticos–, por ello el profesor debe crear contextos favorables para que los alumnos se impliquen en actividades significativas para ellos. Es en este contexto donde la *evaluación* es entendida como una *vía para el aprendizaje* porque:

- además de la *dimensión certificativa,* que responde a las exigencias sociales;
- aparece la *dimensión formativa ó reguladora,* que tiene como objetivo principal contribuir en el proceso del aprendizaje del alumno; como afirma el NCTM (2000),

[74] Cfr. GIMÉNEZ, Joaquín (2005), Apuntes y guías; y, SANTOS, Leonor (2004). *La evaluación del aprendizaje en Matemáticas: orientaciones y retos*, p. 174.

"la evaluación no debe hacerse solamente *para* el alumno, sino que también debe hacerse *para* el alumno, de forma que se oriente y mejore su aprendizaje" [75].

Una *evaluación de calidad* que tiene presente la realidad de tener que estar subordinada al aprendizaje, ha de pasar mediante un registro sistemático, por tres grandes etapas:

- la *inicial*, detecta los conocimientos previos en el alumno;
- la *de seguimiento* (la más extensa en tiempo), en la que el profesor registra la información a través del diagnóstico del aprendizaje y la retroalimentación de la gestión de la enseñanza;
- la que se da *al término* de la Unidad Didáctica, por la diferenciación entre los objetivos necesarios a alcanzar en esta Unidad y los que se seguirán consolidando en otras unidades.

A continuación se describen los instrumentos utilizados por la profesora del *INCAP Los Samanes* para la evaluación del proceso de aprendizaje de sus alumnas de 9º grado durante el curso escolar 2004-2005.

3.2.4.1. Observaciones de los participantes

La profesora del *INCAP Los Samanes* observó con detenimiento el trabajo en clase de las alumnas, las tareas asignadas para la casa, algunos cuadernos de apuntes, los errores recursivos sobre el contenido y las dificultades para asimilar el tema; reflexionó día a día sobre su estilo de enseñanza, la metodología utilizada y los correctivos aplicados para lograr un aprendizaje eficaz.

Las observaciones de los participantes del proceso de enseñanza y aprendizaje se recogieron metódicamente a través de las siguientes vías:

- *Notas ó diario de trabajo de la profesora* [76]**:** en un cuaderno de apuntes personales de trabajo ésta fue anotando ordenadamente las diversas observaciones y aspectos

[75] NCTM (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática,* p. 22.
[76] "El *cuaderno del profesor* es el documento de registro sistemático de las tareas previstas y el documento en el que se resumen conclusiones y se adoptan decisiones para rectificar en la próxima unidad o en el próximo curso". RICO, Luis, p. 227. En la p. 229 aparece un modelo de formato para las anotaciones del profesor; que conviene basarlo en el registro de lo previsto para una clase y los resultados a posteriori.

relacionados con la experiencia educativa; las anotaciones se llevaron a lo largo de las seis semanas que duró el proceso;

- *Cuaderno de apuntes y hojas de trabajo de las alumnas*: un punto de referencia importante de observación fueron los cuadernos de apuntes de clase (cfr. ANEXO 10) y las hojas de trabajo realizadas en casa por varias estudiantes (cfr. ANEXO 11); con estos documentos se comparó el saber enseñado por la profesora en cada sesión, con el saber aprendido por el estudiante [77]. Los escritos de las alumnas muestran el gran interés y esfuerzo con el que participaron en el proceso;
- *Conversaciones orientadoras con los estudiantes*: se aprovechó el clima de confianza de la profesora con sus alumnas para obtener un *feed-back* continuo y lograr una mayor calidad en el proceso de enseñanza y aprendizaje; estas conversaciones se realizaron semanalmente, y a veces, con mayor frecuencia.

3.2.4.2. Instrumento para cuantificar el aprendizaje de las alumnas: la rejilla

Este instrumento ha sido muy utilizado en las últimas investigaciones de Didáctica en Matemática. La prueba final aplicada para detectar el grado de aprendizaje de las estudiantes del *INCAP Los Samanes,* se analizó de la siguiente manera:

- se utilizó el *cuadro que reordenaba* las preguntas de las prueba respecto al nivel de dificultad y al tipo de pregunta (cfr. ANEXO 4);
- se *cuantificó el aprendizaje por alumna, por nivel y tipo de pregunta,* según las respuestas a las preguntas de la prueba. La escala de puntuación de cada nivel y tipo de pregunta fue de 1 a 3 (cfr. ANEXO 5).

En ese instrumento se hizo patente el nivel de logro de las diversas competencias matemáticas de las alumnas; también se detectaron debilidades, dificultades y errores de las estudiantes. Estos datos constituyeron un punto de referencia para mejorar el proceso educativo.

---

[77] Esta forma es muy utilizada en investigaciones de didáctica en matemática para comparar el saber enseñado por el docente y el saber aprendido por el estudiante. Cfr. RUIZ HIGUERAS, Luisa (1998). *La didactificación de un objeto matemático. El caso de la función en enseñanza secundaria.*

3.2.4.3. Análisis cualitativo y cuantitativo del aprendizaje de las alumnas: prueba final

La evaluación que se dio *al término de la Unidad Didáctica* llevó a diferenciar entre los objetivos necesarios a alcanzar en ese contenido curricular y los que seguirán consolidándose en otras unidades. Durante todo el proceso se insistió en la *evaluación formativa*, aquella que contribuye a mejorar tanto la enseñanza como el aprendizaje; con ella, se interpretó y se apreció el trabajo o el rendimiento de las alumnas y se utilizó dicha información para mejorar sus competencias matemáticas[78].

Se realizó la *evaluación final en dos fases*:

- en la primera, cada alumna contestó *la prueba final,* la profesora las corrigió e hizo los comentarios correspondientes a las respuestas de las estudiantes;
- en la segunda, la alumna *repitió las preguntas cuyo contenido no dominaba,* las cuales fueron evaluadas de nuevo.

Este sistema de evaluación en dos fases hizo que cada alumna tuviera muy clara la *evolución de su propio aprendizaje*.

Para *analizar el grado de asimilación final* del aprendizaje sobre función afín, se preparó un cuadro que reordenara las preguntas de las prueba respecto al nivel de dificultad y al tipo de pregunta (cfr. ANEXO 4). El puntaje de esta prueba contempló un valor del 25% para las preguntas de nivel bajo, 50% para las de nivel medio y 25% para las de nivel alto, según sugieren la mayoría de los especialistas en evaluación.

Además de rellenar *la rejilla* (cfr. ANEXO 5), se llevó a cabo un análisis detallado de todas las pruebas y se obtuvieron resultados muy valiosos. Los diversos aspectos a destacar en cada pregunta se reorganizaron en un cuadro vaciando la información de 30 pruebas (cfr. ANEXO 6) y después se reflejaron otros aspectos que no aparecían en ese cuadro (cfr. ANEXO 7).

[78] Cfr. SANTOS, Leonor *La evaluación del aprendizaje en Matemáticas: orientaciones y retos.* p. 158.

3.2.5. Limitaciones de la Primera Fase

Las *limitaciones de esta fase del trabajo* fueron grandes, sin embargo se superaron gracias al empeño e ilusión de todos los integrantes del proceso. Se pueden destacar, además de la *resistencia general al cambio* que el material innovador produjo en el aula, limitaciones de varios tipos:

- *por parte del docente,* inseguridad ante la experiencia innovadora con un cambio radical de metodología en el aula y del enfoque del contenido;
- *por parte de los estudiantes,* además de las características de la adolescencia que se hicieron patentes en este segundo lapso escolar, se notó una actitud de curiosidad y expectación frente a la novedad didáctica [79]; así como un desconcierto y ansiedad para adaptarse a la nueva metodología;
- *por parte de la metodología*, los cambios radicales con respecto a los modos tradicionales de enseñar, aprender y evaluar en matemática, causaron bastante descontrol durante la aplicación de la Unidad Didáctica.

3.3. Metodología de la Segunda Fase

Esta Segunda Fase del trabajo de investigación *se compone de una serie de subtareas* como son, recoger las experiencias de los diversos docentes que participaron en la Primera Fase, utilizar los instrumentos para la recogida de la información; y, analizar los resultados obtenidos, entre otras.

3.3.1. Reestructuración de la Unidad Didáctica

Durante el proceso de experimentación se fueron detectando las fortalezas y las debilidades del documento respecto a la metodología, las actividades, las dificultades y los errores. De una

[79] Con la Actividad del llenado de la piscina hubo más de una exclamación de sorpresa similar a: ¡*Esto parece física*!; esto refleja la distancia de la matemática que se imparte en clase habitualmente y la que utiliza el estudiante en su entorno cotidiano.

forma natural algunos de estos aspectos se tuvieron en cuenta en el desarrollo de las clases de la Primera Fase de esta investigación, otros se incluyeron *a posteriori*.

El nuevo diseño de la Unidad Didáctica, culminó después de un enriquecedor proceso que pasó por el *diseño de la primera versión* de la Unidad Didáctica (cfr. 3.2.1.2.), la *doble validación del documento* (cfr. 3.2.2. y 3.2.3.), la *recolección de las experiencias de los docentes* (cfr. 3.2.3.2. y 3.2.4.1.), la *reflexión sobre las diversas prácticas educativas* (cfr. 3.3.1.1.) y la *incorporación de las decisiones* tomadas para mejorar la Unidad Didáctica (cfr. 3.3.1.2. y 3.3.1.3).

3.3.1.1. Reflexión de experiencias: hacia la nueva aplicación

En toda investigación educativa están presentes las *reflexiones sobre los tres aspectos clave del proceso de enseñanza y aprendizaje*:

- quién es el *profesor*, cuáles son sus fortalezas y sus debilidades;
- con qué grupo de *estudiantes* se va a trabajar;
- cuál es el *objeto matemático* que se desea transmitir.

Estos tres aspectos fueron objeto de una profundización y estudio antes de proceder a la redacción definitiva del documento. El análisis de las experiencias descritas (cfr. 3.2.2.) hizo posible la reelaboración de la Unidad Didáctica para adaptarla a los *requerimientos del grupo principal de estudio*.

Las consideraciones sobre esos tres aspectos pedagógicos sirvieron de puntos de apoyo en esta Segunda Fase de la investigación:

- la *profesora* –autora de este trabajo- que aplicaría de nuevo la Unidad Didáctica: docente con seis años de experiencia en aula, con prácticas docentes en los últimos años de secundaria; tiene penetración sobre las bases teóricas de los diversos temas; y conocía bien a las alumnas del grupo principal de estudio;
- el *grupo principal* elegido para esta segunda fase: estudiantes de 2º año de Media Diversificada en Ciencias en la misma institución educativa [80]; cuyos conocimientos previos sobre función afín habían sido impartidos con un enfoque de metodología

[80] INCAP *Los Samanes.*

tradicional, algorítmico y formalista, en el cual los profesores explicaron el tema siguiendo un libro de texto, y las alumnas realizaron los ejercicios para poner de manifiesto sus aprendizajes [81]; el grupo escogido para esta Segunda Fase era muy aplicado. Estaba constituido por buenas estudiantes, perseverantes en sus trabajos, y por otras con lagunas patentes en los conocimientos previos;

- respecto al *contenido matemático* se siguió en la línea de la Unidad Didáctica, primera versión; se mejoró notoriamente, al completar las actividades y al optimizar los comentarios didácticos.

3.3.1.2. Cambios en el documento: las decisiones

Los objetivos permanecieron idénticos a la Unidad Didáctica (primera versión). En las actividades se hicieron cambios considerables. A continuación se presentan *algunos motivos que justificaron las modificaciones del documento* en su versión definitiva; la primera versión del documento contenía nueve actividades y la definitiva contiene bastantes más, quince [82]:

Actividades de motivación y exploración inicial

- *Actividad Nº 1. ¿Recuerdas la función afín?*: se modificó totalmente; la de la primera versión consistía en el uso de tarjetas en forma de dominó; se prefirió comenzar de una forma más directa y sencilla para el estilo acostumbrado del docente de aula en Básica III [83].

Actividades de desarrollo de nuevas ideas

- *Actividades Nº 2, 3 y 4. Descubriendo el número* $\prod$*, Descubriendo más relaciones Expresemos de forma algebraica:* forman una unidad y permanecieron similares a las de la primera versión; varios docentes las utilizaron como actividad de motivación en

[81] En esta decisión también repercutió el calendario cronológico escolar: de esta forma se volvería a aplicar la Unidad Didáctica en el curso escolar 2004-2005.
[82] Los Nº de las Actividades en este apartado, hacen referencia a las recogidas en la versión definitiva de la Unidad Didáctica sobre función afín (cfr. ANEXO 1).
[83] En su primera versión la *Actividad* Nº 1 recogía el estilo propio de los docentes de Básica I y II.

la fase de introducción del tema; es muy atractiva e interesante para los alumnos porque los aspectos experimentales refuerzan los objetivos de tipo conceptual;

- *Actividad Nº 5. Llena la piscina:* se consideró la *actividad nuclear* a la que todas las demás hacían referencia; se mantuvo igual en lo esencial respecto a la primera versión; se completó con el problema inverso –vaciado de la piscina–; se mejoraron los comentarios didácticos; refuerza los diversos tipos de objetivos del documento (conceptuales, procedimentales y actitudinales);
- *Actividad Nº 6. A subir las maletas al carro*: se mantuvo idéntica; se utilizaría para consolidar y completar lo aprendido en la Actividad Nº 5; refuerza, como la actividad anterior, los objetivos de tipo conceptual, procedimental y actitudinal;
- *Actividad Nº 7. Influencia de los parámetros m y b (pendiente y ordenada en el origen):* a la actividad correspondiente de la primera versión se le añadió uno de los ejemplos electrónicos –el de los corredores–; el uso de un programa en computadora genera mucha curiosidad, a la que se unen los nuevos aprendizaje en los alumnos; refuerza los objetivos de tipo conceptual y actitudinal;
- *Actividad Nº 8. Conectando lenguajes y parámetros de la función afín*: actividad totalmente nueva; se refuerza todo lo aprendido hasta el momento respecto a los nuevos conceptos, a las conexiones entre las representaciones de la función afín y al estilo razonado de enseñanza y aprendizaje; en ella se evidencia lo innecesario de la memorización de fórmulas (usual en el estilo tradicional) cuando los conceptos básicos son significativos para el alumno; refuerza los objetivos de tipo conceptual, procedimental y actitudinal;
- *Actividad Nº 9. Practica y explica:* actividad totalmente nueva; tiene un claro objetivo de tipo procedimental unido al actitudinal; promueve la comunicación del alumno, competencia matemática muy aconsejada por la NCTM.

Actividades de consolidación y ajuste de ritmos

- *Actividad Nº 10. Apliquemos lo aprendido*: actividad que se mantuvo idéntica; refuerza especialmente los objetivos de tipo procedimental orientados por la significatividad de los conceptos; estos ejercicios se conectan muy bien con los que aparecen en los libros de texto (de tendencia formalista), dando un paso adelante al promover la competencia de razonamiento aconsejada por la NCTM;

- *Actividad Nº 11. ¿Cuál es el área del aula?*: actividad totalmente nueva; se trata de un problema cerrado que ha de ser resuelto; conecta con conocimientos de geometría; engancha con las nuevas prácticas didácticas de *Resolución de problemas*; y, promueve las competencias de razonamiento y de representación;
- *Actividad Nº 12. Completa el cuadro*: actividad totalmente nueva; es un complemento de la Actividad Nº 8 porque es una de sus aplicaciones prácticas; y, refuerza los objetivos de tipo conceptual, procedimental y actitudinal;
- *Actividad Nº 13. Intenta ser un profesor creativo*: totalmente nueva; se trata de un problema abierto que ha de ser resuelto; se introdujo para impulsar la creatividad y razonamiento significativo; promueve las nuevas prácticas didácticas de *Resolución de problemas*; apunta a las competencias de razonamiento y de representación;
- *Actividad Nº 14. Sala de fiesta*: se mantuvo idéntica a la redactada en la Unidad Didáctica en su primera versión; se trata de un problema cerrado a ser resuelto, con alto grado de dificultad (motivo por el cual se introdujo la Actividad Nº 11); conecta con bastantes conocimientos de geometría; y, también engancha con las nuevas prácticas didácticas de *Resolución de problemas*;
- *Actividad Nº 15. Aquiles y la tortuga*: actividad que se mantuvo idéntica; es un problema atractivo en su contenido; conecta perfectamente con el tema de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas que se presenta en el programa de 9º grado a continuación del tema de función afín, puede servir de actividad enlace entre las Unidades Didácticas con estos dos contenidos.

Metodología de las actividades

En los comentarios a las actividades se dan bastantes *sugerencias para la acción del docente durante las clases,* de manera que sea él mismo quien determine los detalles metodológicos. Para esta decisión se tuvieron muy en cuenta las diversas experiencias de la Primera Fase de esta investigación.

Actividades de evaluación

El cambio más importante respecto a la evaluación, además de lo señalado en la Actividad Nº 1, consistió en completar los comentarios de cada actividad acerca del modo de evaluarla, en todos los casos *se destaca la dimensión formativa más que la certificativa*; en ellos se reseña la importancia de la evaluación como un proceso continuo subordinado al aprendizaje del alumno y se deja gran libertad al docente para optar por una u otra forma de cuantificación y análisis del aprendizaje.

3.3.1.3. Rediseñar la Unidad Didáctica: versión definitiva del documento

Para la redacción definitiva de la Unidad Didáctica se emplearon las decisiones señaladas anteriormente (cfr. 3.3.1.2.), así como la experiencia didáctica recogida durante la Primera Fase de la investigación. Específicamente, el escrito definitivo quiso poner de relieve los siguientes aspectos:

- un enfoque que destacara la *conexión de los diversos lenguajes matemáticos*; un impulso del *razonamiento lógico-comprensivo y gráfico-visual*; un apuntalar la *relación de la matemática con las actividades cotidianas* (e inducir al análisis y descubrimiento de este concepto matemático en otras situaciones de su cotidianeidad);
- un refuerzo del *estilo de aprendizaje significativo* basado en los conocimientos previos del alumno (sin dar nada por sabido); una clara intención de proporcionar ideas y esquemas eficaces para la adquisición de los nuevos conocimientos; un intento renovado de favorecer el desarrollo de las *destrezas matemáticas*;
- la inclusión de actividades que promueven la *creatividad del alumnado* y la tendencia actual de aprender matemática por la *Resolución de problemas* (abiertos y cerrados); reunir una mayor variedad de actividades (cfr. las totalmente nuevas de 3.3.1.2.);
- el *aumento del número de actividades disponibles* en el documento*, para* que cada profesor pueda *seleccionar* las que se adapten mejor a las necesidades de su grupo de alumnos; la aplicación de una Unidad Didáctica no implica utilizar todas las actividades contenidas en el documento durante el ciclo de clases sobre ese tema;

- una mejora de los *comentarios didácticos* relacionados con la *actuación del profesor*, los posibles roles en el desarrollo de las mismas actividades: el de *facilitador* del aprendizaje de los alumnos, el de *expositor* de alguna actividad –siempre con la idea de conseguir participación del alumnado– o el de *moderador* en la puesta en común de los nuevos conocimientos adquiridos; así, se logra un documento más flexible y adaptable a grupos más o menos numerosos;
- de igual manera los comentarios respecto a la *actuación del alumnado* son de gran ayudan para que éstos mantengan *una actitud participativ*a y se involucren más en su propio aprendizaje;
- una mejora del proceso evaluativo, se insiste en la *evaluación diaria* de las actividades realizadas por los alumnos para lograr un aprendizaje más efectivo y significativo en los jóvenes adolescentes que están en las aulas hoy en día.

La Unidad Didáctica sobre función afín (cfr. ANEXO 1) puede utilizarse como un *ejemplo de material diseñado por el propio docente que desea impartir una enseñanza de calidad*: estimulo para la labor educativa del profesor venezolano, y guía para la elaboración de Unidades Didácticas propias (del mismo contenido ó de otros).

3.3.2. Experiencia didáctica: grupo principal de estudio

3.3.2.1. Utilización del material y temporalización

Durante el curso escolar 2004-2005 la Unidad Didáctica sobre función afín en su versión definitiva fue aplicada por la profesora Marta García a dos grupos de estudiantes de 2º año de Media Diversificada en Ciencias. Se incluyó dentro de la programación del tercer lapso de una forma natural (como un tema complementario), y se analizó la propia práctica docente basada tanto en el nuevo documento como en las experiencias de la Primera Fase. De nuevo, la profesora imprimió su huella a lo largo de todo el proceso e hizo más o menos hincapié en unas determinadas actividades, teniendo en cuenta diversas restricciones [84].

[84] La única actividad que se dejó de presentar fue la Nº 15. *Aquiles y la tortuga*, puesto que no se iba a proceder con el tema de métodos de resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

El tiempo para impartir el contenido se programó y duró cuatro semanas según las previsiones, planificación y pericia de los integrantes del proceso. En ambos salones todas las participantes pusieron gran interés, esfuerzo y dedicación; son cuatro el número de horas aprobadas por el Ministerio de Educación para 2º año de Media Diversificada (cuatro horas académicas ó cuatro períodos de tiempo de 40 ó 45 minutos). En el tiempo dedicado se incluye la evaluación.

3.3.2.2. Grupo principal de estudio: contexto y sujetos

Se impartió simultáneamente el mismo objetivo, *Análisis de función afín,* a los dos grupos de 2º año de Ciencias Diversificadas, secciones A y B de la Unidad educativa *INCAP Los Samanes* –que funciona en la Sede del Colegio Los Campitos. Ruta C. Urbanización Los Campitos. Caracas–. El grupo principal de estudio elegido para esta investigación, fue la sección A, con 25 alumnas. El período de tiempo en el que se impartió fue desde el día 28 de marzo hasta el 22 de abril.

En las zonas de donde proceden las alumnas de esta Unidad Educativa –Las Minas de Baruta, Baruta, El Hatillo, La Trinidad, etc. –, el colegio goza de gran prestigio; está dirigido a familias de bajos recursos que desean una educación de calidad –con orientación cristiana– para sus hijas; formación académica y espiritual que la gran mayoría de las alumnas agradecen notoriamente.

Es frecuente que las estudiantes de los primeros años de Básica III presenten fallas notables en los conocimientos previos en la asignatura de matemática, los cuales se van subsanando con el tiempo en esa institución educativa.

El *grupo principal de estudio* de este trabajo –2º año, sección A– presentaba unas características muy positivas para la aplicación de la Unidad Didáctica en el aula:

- ❖ la mayoría de las alumnas estudiaban en el colegio desde los últimos cinco años y estaban bien identificadas con la institución educativa;
- ❖ se conocían entre sí y a la profesora de matemática, quien comenzó a darles clase en septiembre de 2004;

- durante los dos lapsos anteriores habían trabajado en grupos de 3 a 5 personas en diversas tareas: las alumnas estaban habituadas al trabajo en equipo; se evidenciaba el sentido de responsabilidad y, el trabajo cooperativo lo hacían francamente bien;
- el grupo estaba muy integrado al sistema interno de enseñanza, la presión respecto a la evaluación de la asignatura de matemática en este nivel era pequeña [85]; y, además, el número de alumnas era muy manejable para la profesora.

La experiencia del docente sobre la aplicación de esta Unidad Didáctica y el dominio del tema en todos los sentidos –contenidos, secuencia, dificultades, errores habituales– llevó a que:

- el *desarrollo de las clases fluyera* con mayor espontaneidad y visión integradora;
- se tuvieran más en cuenta los *obstáculos cognitivos y los errores* que se iban a presentar en las estudiantes;
- se pudiera *reforzar el aprendizaje cooperativo y significativo*, el cual se venía realizando a lo largo de todo el curso escolar.

3.3.3. Evaluación del aprendizaje de las alumnas

A través de las *Guías entregadas,* del *CD facilitado* (libro sobre *Evaluación en matemáticas*) por el profesor Giménez durante el curso que impartió en enero–febrero del 2005 en la USB y del artículo de Santos, *La evaluación del aprendizaje en Matemáticas: orientaciones y retos,* se profundizó más aún sobre la relación directa del proceso de aprendizaje de calidad con el proceso de evaluación de calidad. El alumno asumió un papel verdaderamente participativo en su evaluación, de forma que reguló su propio aprendizaje. Este fenómeno ocurre sólo si los *procesos evaluativos son transparentes*, el alumno debe saber lo que se espera de él, comprender cuáles son los criterios de calidad que se valoran en un trabajo y aceptar el error como fenómeno natural generador de aprendizajes.

Se procedió en la misma línea de la evaluación realizada en la Primera Fase de esta investigación (cfr. 3.2.4.), poniendo mayor énfasis en la *evaluación formativa:* una evaluación al servicio del aprendizaje que tiene en cuenta *la comunicación como aspecto fundamental,* la

[85] Entre otros aspectos, porque las notas de este año escolar no son tomadas en cuenta para los exámenes de ingreso en las universidades del país.

interacción profesor-alumno ha de ser promovida por el docente con la clara intención de contribuir al aprendizaje del alumno.

La profesora del grupo principal observó con detenimiento el trabajo en clase de las alumnas, corrigió las tareas asignadas para la casa, analizó algunos cuadernos de apuntes, detectó los errores recursivos sobre el contenido y las dificultades para asimilar el tema. De nuevo reflexionó día a día sobre su estilo de enseñanza, la metodología utilizada y los correctivos aplicados para lograr un aprendizaje eficaz.

3.3.3.1. Observaciones de los participantes

Las observaciones de los participantes en el proceso de enseñanza aprendizaje se recogieron metódicamente a través de las siguientes vías:

- *Notas ó diario de trabajo de la profesora:* con el apoyo de las observaciones y análisis realizados en la Primera Fase de esta investigación, la profesora anotó ordenadamente en un cuaderno de apuntes personales, las nuevas observaciones y aspectos pedagógicos de la Segunda Fase; las anotaciones se tomaron a lo largo de las cuatro semanas que duró el proceso; "el *cuaderno del profesor* es el documento de registro sistemático de las tareas previstas y el documento en el que se resumen conclusiones y se adoptan decisiones para rectificar en la próxima unidad o en el próximo curso" [86];
- *Cuaderno de apuntes y hojas de trabajo de las alumnas*: un punto de referencia importante de observación fueron los cuadernos de apuntes de clase (cfr. ANEXO 13) y las hojas de trabajo realizadas en casa por varias estudiantes; a través de estos materiales se pudo comparar el saber enseñado en cada sesión por el docente con el saber aprendido por el estudiante [87]. Los escritos de las alumnas muestran su gran interés y esfuerzo;
- *Conversaciones orientadoras con los estudiantes*: se aprovechó el clima de confianza de la profesora con sus alumnas para obtener un *feed-back* continuo y lograr una mayor

[86] RICO, Luis, p. 227. En Ibíd., p. 229 aparece un modelo de formato para las anotaciones del profesor; conviene que se basen en el registro de lo previsto para una clase y los resultados *a posteriori.*
[87] Como señalamos en la primera fase de la investigación, este tipo de análisis es muy utilizado en investigaciones de Didáctica en Matemática para comparar el saber enseñado por el docente y el saber aprendido por el estudiante. Cfr. RUÍZ HIGUERAS, Luisa (1998). *La didactificación de un objeto matemático. El caso de la función en enseñanza secundaria.*

calidad en el proceso de enseñanza y aprendizaje sobre función afín; estas conversaciones se realizaron diariamente con diversas alumnas.

3.3.3.2. Instrumento para cuantificar el aprendizaje de las alumnas: la rejilla

Se utilizó la rejilla como *instrumento para medir el aprendizaje* logrado en las estudiantes del *INCAP Los Samanes*. Después del *proceso de evaluación* diagnóstica, formativa (ó reguladora), y sumativa (ó calificativa) realizado a lo largo de las cuatro semanas en las que se aplicó la Unidad Didáctica, el grado de aprendizaje de las estudiantes del *INCAP Los Samanes* se detectó a través de la prueba final, la cual se analizó de la siguiente manera:

- ❖ se utilizó el *cuadro que reordenaba* las preguntas de las prueba respecto al nivel de dificultad y al tipo de pregunta (cfr. ANEXO 4.);
- ❖ lo más objetivamente posible se *cuantificó el aprendizaje por alumna, por nivel y tipo de pregunta, según las respuestas de la prueba*; la escala de puntuación de cada nivel y tipo de pregunta se aumentó de 3 a 5 puntos, se calificó del 1 a 5 para observar mejor la gradación del aprendizaje (cfr. ANEXO 8.).

En esa rejilla se hizo patente el *nivel de logro de las diversas competencias* matemáticas de cada alumna, puesto de manifiesto en su prueba final, de manera que cada estudiante pudiera detectar los errores y corregirlos; con este instrumento, el grado del aprendizaje es detectado rápidamente en sus diversos aspectos.

3.3.3.3. Análisis cualitativo y cuantitativo del aprendizaje de las alumnas: prueba final

La experiencia acerca del análisis realizado durante la Segunda Fase de la investigación se inclinó más todavía hacia el *análisis cualitativo* que el cuantitativo, no se detalló de forma puntillosa el análisis de los resultados como se hizo en la Primera Fase; a través de la rejilla se detectó el nivel de logro de las diversas competencias matemáticas en cada alumna y se sacaron conclusiones.

En esta Segunda Fase de la investigación la *evaluación formativa* se realizó durante todo el proceso en un clima de confianza y comprensión, por lo que los resultados en la profesora y en las alumnas mejoraron notoriamente con respecto a la Primera Fase.

Se volvió a utilizar el instrumento de *evaluación final en dos fases*:

- en la primera, la alumna contestó *la prueba final* y la profesora la corrigió e hizo los comentarios convenientes a las respuestas de las alumnas;
- en la segunda, la alumna *repitió las preguntas* cuyo contenido no dominaba y fueron de nuevo evaluadas.

Este sistema de evaluación en dos fases, tan interesante por sus logros, hizo que cada alumna tuviera muy clara la evolución de su propio aprendizaje.

3.3.4. Análisis de los resultados de la Segunda Fase

Los resultados de la Segunda Fase de la investigación, además de valiosos, fueron sorprendentes, especialmente para los docentes involucrados en el proceso [88]. Esos resultados se pueden ver desde varias perspectivas:

- en el *aprendizaje de las alumnas* (cfr. 3.3.3.), al final de la aplicación de la Unidad Didáctica;
- en el *documento didáctico en sí* (cfr. 3.3.1.), material de calidad disponible a los docentes de 9º grado;
- en los *docentes que participaron en la investigación*, especialmente en la profesora que la realizó (cfr. 4.3); aspecto que se detallará en el próximo capítulo.

[88] En el próximo capítulo se desarrolla un análisis más profundo y exhaustivo de los resultados de la investigación desde el principio hasta el final.

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

En esta investigación cualitativa se fueron recogiendo *los datos a lo largo de todo el proceso*, y el análisis de éstos se realizó de una manera paulatina e interconectada en cada una de las fases del proyecto. Los resultados obtenidos fueron muy ricos desde la perspectiva educativa, a continuación se irán desglosando los aspectos más destacados del análisis de resultados y de las conclusiones parciales.

Como el *docente y el investigador se identificaron* en esta experiencia didáctica, las *mejoras en la práctica* fueron evidentes en los entornos educativos donde se desarrolló la investigación. El análisis de los resultados se llevó a cabo de una manera sistémica: se tuvo en cuenta el mayor número de variables en cada fase del proceso para así obtener unos resultados más ricos y aplicables en muchos otros contextos pedagógicos.

Este trabajo de investigación pretende ser el inicio de una serie de *Unidades Didácticas de Álgebra sobre funciones algebraicas*, que converjan en la realización de un libro de texto con la perspectiva constructivista del aprendizaje significativo.

4.1. Proceso del Diseño de la Unidad Didáctica sobre función afín

En esta investigación se observan varios *aspectos pedagógicos referentes al diseño de la Unidad Didáctica*, estos fueron:

- la *metodología de construcción de la Unidad Didáctica* sobre función afín en contextos educativos de ámbito institucional a nivel de secundaria;
- la *concepción modular de las actividades diseñadas*, muestra de la flexibilidad curricular.

4.1.1. En relación con la Unidad Didáctica

La *metodología utilizada para la elaboración de la Unidad Didáctica* de función afín (cfr. ANEXO 1) fue una adaptación de las propuestas de Callejo y Rico (cfr. 2.2 y 2.3). Las *fases* por las que se pasó, se detallan a continuación:

- *profunda reflexión* de los documentos disponibles al docente (cfr. 3.2.1): el *objetivo n. 17, Analizar las características de la función afín*, del programa oficial vigente de la asignatura de Matemática para 9º grado (cfr. ANEXO 2); los *libros de texto escolares*; otros documentos localizados en la red; la monografía de Callejo y los capítulos del libro coordinado por Rico;
- *prediseño* de la Unidad Didáctica (cfr. 3.2.1.2): decisiones sobre la orientación pedagógica a utilizar, en sus aspectos epistemológicos, didácticos, cognitivos y curriculares;
- *desarrollo* del documento en su Primera Fase (cfr. 3.2.1.2.): explicitación y redacción detallada de los objetivos, contenidos, actividades de enseñanza y aprendizaje, materiales necesarios, estrategias pedagógicas, evaluación y duración;
- *experimentación* del material o aplicación de la Unidad Didáctica diseñada, en el aula (cfr. 3.2.2.): fase clave que llevó a buen término el trabajo de la elaboración definitiva del documento al finalizar los pasos que se realizaron después de éste;
- *evaluación* de la primera versión de la Unidad Didáctica a través de las respuestas dadas al *cuestionario* (cfr. ANEXO 3) por los docentes que utilizaron el material al impartir el tema de función afín (cfr. 3.2.3.2.): valoración del documento en relación a la adecuación a los objetivos perseguidos; y, consideración de los resultados obtenidos en el proceso de enseñanza y aprendizaje (cfr. 3.2.4.);
- *diseño definitivo* de la Unidad Didáctica (cfr. 3.3.1) después de hacer las modificaciones y mejoras de acuerdo a la valoración y a los resultados del paso anterior;
- *segunda experimentación* o aplicación de la Unidad rediseñada en el aula (cfr. 3.3.2.): comprobación de la pertinencia de las modificaciones;

- *reflexión final* del trabajo, analizado desde una perspectiva global.

4.1.2. En relación con cada actividad

En la *redacción de cada actividad* de la Unidad Didáctica sobre función afín, se detallaron los siguientes aspectos:

- *título de la actividad* que tuviera una clara referencia al contenido de la misma;
- *otros temas de Unidades Didácticas* en los que se podría utilizar, además del tema específico de función afín;
- *fases de la Unidad Didáctica* en la que se incluyó, en la de motivación y exploración inicial, en la de desarrollo y nuevas ideas, o en la de consolidación y ajuste de ritmos;
- *enunciado* claro, completo y adaptado al contexto socio-cultural de las alumnas;
- *intenciones* propuestas por el docente en el desarrollo de cada actividad;
- *comentarios* adicionales, principalmente, en relación con la metodología, las intervenciones de los alumnos y del profesor, y con el modo de ser evaluada;
- *fuente,* referencia completa en la cual se inspiró la profesora para redactarla.

La *concepción modular de las actividades diseñadas* es una muestra de la flexibilidad curricular (cfr. 3.3.1.2.; ANEXO 1, Actividad Nº 15; y, ANEXO 9, II.6); esto se reflejó en que*:*

- los profesores *decidieron las actividades a utilizar* al impartir el tema sobre función afín a cada uno de los grupos de alumnos;
- pueden *utilizarse de una manera autónoma*, incluyéndolas en otras Unidades Didácticas.

4.2. Aspectos pedagógicos transferibles a otros contextos educativos

En esta investigación se observan varios *aspectos pedagógicos transferibles* a otros contextos educativos, estos son:

- la *metodología de construcción de Unidades Didácticas* es transferible a otras áreas y contextos educativos de ámbito institucional (escolar ó universitario), en asignaturas científicas;
- *concepción modular de las actividades diseñadas* en este tipo de documentos es una muestra de la flexibilidad curricular.

4.2.1. En relación con la Unidad Didáctica

La *metodología de construcción de Unidades Didácticas* es transferible a otras áreas y contextos educativos de ámbito institucional (escolar ó universitario) porque los pasos que se siguieron en su diseño, adaptados a otras situaciones (cfr. 4.1.), pueden ser utilizados por el docente en la redacción de sus propios documentos pedagógicos [89]:

- *profunda reflexión* de los documentos disponibles al docente: contenido del programa oficial vigente de la asignatura; los libros de texto*;* Unidades Didácticas que recogen experiencias de otros profesores, y del equipo docente de la Unidad Educativa donde se labora; otros materiales localizados en la red; etc.;
- *prediseño* de la Unidad Didáctica: decisiones sobre la orientación pedagógica a utilizar, en sus aspectos epistemológicos, didácticos, cognitivos y curriculares;
- *desarrollo* del documento en su Primera Fase: explicitación y redacción detallada de los objetivos, contenidos, actividades de enseñanza y aprendizaje, materiales necesarios, estrategias pedagógicas, evaluación y duración;
- *experimentación* del material o aplicación en el aula de la Unidad Didáctica diseñada: fase clave para llevar a buen término la redacción definitiva del documento;
- *evaluación* de la primera versión de la Unidad Didáctica por los docentes que utilicen el material para transmitir un contenido específico, mediante el análisis de las respuestas a las preguntas del *cuestionario* (cfr. ANEXO 3): valoración de la Unidad Didáctica en relación a su adecuación a los objetivos perseguidos; y, consideración de los resultados obtenidos en el proceso de enseñanza y aprendizaje;

---

[89] Documentos que podrían ser publicados, teniendo así un mayor impacto en la práctica de la educación matemática en el país.

- *diseño definitivo* de la Unidad Didáctica después de hacer las modificaciones y mejoras pertinentes de acuerdo a la valoración y a los resultados del paso anterior;
- *segunda experimentación* o aplicación de la Unidad rediseñada, en el aula: comprobación de la pertinencia de las modificaciones [90].

Estos pasos pueden darse de *forma no cronológica en el tiempo*, para ello se requiere de buenos hábitos de trabajo investigativo en el docente (cfr. 4.3.).

4.2.2. En relación con cada actividad

El profesor puede *redactar cada actividad de manera autónoma* en cualquier momento del año. Es importante que al hacerlo se detallen los siguientes aspectos:

- *título de la actividad*, con una clara referencia al contenido de la misma;
- *otros temas de Unidades Didácticas* en los que se podría utilizar, además del tema específico a impartir;
- *fases de las Unidades Didácticas* en la que se pueden incluir (puede variar su localización según el contenido que se transmite y el nivel de los alumnos): la de motivación y exploración inicial, la de desarrollo y nuevas ideas, o la de consolidación y ajuste de ritmos;
- *enunciado* claro, completo y adaptado al contexto socio-cultural de los alumnos;
- *intenciones* propuestas por el docente en el desarrollo de la actividad;
- *comentarios* adicionales, principalmente, en relación con la metodología, las intervenciones de los alumnos y del profesor, y con el modo de evaluarla;
- *fuente,* referencia completa en la cual se inspiró el docente para redactarla.

De esta manera al cabo de uno o dos años, cada profesor o equipo de docentes contará con un número grande de *actividades de aula, bien pensadas, bien redactadas y experimentadas*, las cuales se podrían *ensamblar fácilmente en diversas Unidades Didácticas* a través del trabajo coordinado del equipo de docentes ó del esfuerzo concreto de algún profesor con mayor disponibilidad ó cualidades para ello.

[90] Esto es más factible cuando un mismo docente se mantiene por varios años sucesivos impartiendo clases en un mismo nivel.

La *concepción modular de las actividades diseñadas* es una muestra de la flexibilidad curricular; se reflejará en que*:*

- el profesor *puede decidir las que utilizará* al impartir el tema contenido en la Unidad Didáctica;
- ellas pueden *utilizarse de una manera autónoma*, incluyéndolas en otras Unidades Didácticas.

Es aconsejable que la *incorporación de la nueva metodología sea paulatina,* tomando en cuenta que son muy diferentes tanto la forma usual de enseñanza como los estilos de aprendizaje.

4.3. Formación de profesores

La calidad de la enseñanza y del aprendizaje a nivel institucional, especialmente en el nivel de secundaria, está muy relacionada con *la competencia profesional de los profesores*, por ello es necesario reforzar de diversas maneras su preparación. Esto quiere decir que el *cuidado de la formación de los profesores* tiene que ser una prioridad de todo sistema educativo. En esta investigación se observaron varios *aspectos relacionados con el mejoramiento profesional del profesor* que se recogen con más detalle en los próximos apartados.

Dos maneras interdependientes de *reforzar el mejoramiento* constante de los profesores, son:

- en el *aspecto personal*, el cultivo de hábitos de investigación sobre la práctica;
- en el *ámbito institucional*, es absolutamente necesario el apoyo y estímulo de los directores de la institución educativa y de los coordinadores de departamento.

4.3.1. Perspectiva del docente

En *el docente "investigador"* [91], aquel que se ha propuesto una mejora diaria de su práctica educativa, se observaron cualidades como:

- un *conocimiento profundo de los contenidos* a impartir, fruto del intenso estudio sobre el tema de función afín, y también, del interés por interconectar los contenidos matemáticos con otras áreas del conocimiento;
- un *saber hacer didáctico*, experimentado hondamente en el aula por el dominio de la metodología más apta para cada contenido, y también, por el entusiasmo para plantearse nuevos retos pedagógicos en los próximos cursos escolares;
- una *comprensión de los alumnos* en su completa realidad y situación circunstancial, que impulsó las posibilidades intelectuales de éstos, motivó con las actividades que más interesaban, que los conoció en su contexto socio-cultural, que hizo un buen diagnóstico de los conocimientos previos; esto fue un comienzo del tratar a los alumnos en sus diversidades.

El docente buscó ser un *gerente eficaz de conocimientos*, hacer uso inteligente de sus hábitos intelectuales y morales. Esto no implicó más trabajo, sino *más calidad en el trabajo docente*. Ejemplos de esta forma de actuación del profesor, fueron:

- apertura al *diálogo con el equipo docente* e interés por el cultivo de inquietudes intelectuales (interés por todo);
- costumbre de *buscar referencias bibliográficas* más actualizadas, interesantes y significativas respecto al tema de función afín;
- presencia de *hábitos de orden*: sistema de organización de documentos relevantes por tema; recolección de materiales didácticos de calidad; y recopilación de actividades utilizadas con éxito, con sus comentarios e intenciones;

[91] A ese docente se le puede aplicar el título de investigador de una manera análoga, porque, aunque no llegue a publicar sus "investigaciones diarias", mejorará su práctica docente con ellas y transmitirá sus descubrimientos a otros profesores que tenga cerca.

- esfuerzo por *reflexionar sobre la propia práctica docente y sobre las teorías didácticas* que han mejorado la práctica de otros docentes. En orden a adquirir un estilo personal de enseñanza;
- redacción de la *propia Unidad Didáctica sobre función afín*, publicable en un futuro próximo.

4.3.2. Perspectiva institucional

Las *políticas de formación de profesores* se notaron en todos los niveles educativos, de las siguientes maneras:

- *estímulo de los directivos y coordinadores* de la propia Unidad Educativa durante la aplicación de la Unidad Didáctica innovadora sobre función afín;
- participación en *actividades que mejoraron profesionalmente* a los docente de aula: asistencia a los cursos de la Especialización en Didáctica de la Matemática para Educación Secundaria (USB); y más adelante, también se intentará asistir a congresos, cursos y talleres; a nivel internacional, nacional, local e institucional;
- disponibilidad de *tutores y recursos económicos para estas investigaciones didácticas* (a través de la USB); con repercusión eficaz en la práctica docente a mediano plazo; y próximamente, a largo plazo.

4.4. Integración de los participantes

En esta investigación se observaron interesantes aspectos *pedagógicos de la actuación de los participantes* del proceso educativo, que se relatan en los próximos apartados. El profesor y los alumnos fueron los protagonistas del proceso de enseñanza y aprendizaje en el ambiente escolar; se puede afirmar desde la *metodología constructivista* manejada que:

- el *rol del profesor* fue el de ser una guía eficaz en el aprendizaje de los alumnos;
- el *rol de los alumnos* fue el de ser los protagonistas de su propio aprendizaje.

4.4.1. Modos de participación

A continuación se recogen los *modos de actuación experimentados por los participantes*, con resultados positivos, durante la presente investigación (cfr. ANEXO 1, *Comentarios a las Actividades*):

- *exposiciones del docente* que promovieron el diálogo constructivo con los alumnos a través de la técnica de la pregunta, y los orientaron hacia un aprendizaje significativo;
- *trabajo en el aula con una secuencia* de actuación de los integrantes. Especialmente se trabajó en pequeños grupos (de dos o tres personas), y luego, el grupo completo discutió e intercambió sus hallazgos; los profesores asumieron, respectivamente, el rol de facilitadores y de moderadores de la actividad; esta metodología incrementó las competencias matemáticas en los alumnos;
- asignación *de trabajos individuales* como tareas para la casa y *corrección con comentarios escritos* del docente a cada alumno para destacar los aspectos positivos de las respuestas y aclarar los negativos.

Se recomienda que haya *mucha variedad en los modos de participación* de los integrantes en las actividades, y también, que el propio docente sea quien decida la metodología para cada actividad y grupo de alumnos.

4.4.2. Ambiente de integración

El *ambiente de distendimiento* a lo largo del proceso educativo fue muy eficaz, porque el entendimiento mutuo entre la profesora y las alumnas produjo un clima de confianza, respeto y motivación que facilitaron notablemente los logros de los protagonistas.

El docente se propuso ser *guía eficaz del aprendizaje de sus alumnas* a través de:

- un *acompañamiento del grupo* de estudiantes en su particularidad y de cada alumna en su diversidad, punto radical para valorar y potenciar de la manera óptima la participación activa de los protagonistas del proceso educativo;
- un intento de *integración del equipo de docentes* del centro educativo para lograr en las alumnas un aprendizaje armónico, integrado e interconectado.

Las alumnas fueron las *protagonistas de su propio aprendizaje* gracias a la motivación que el docente inspiró en ellas. El esfuerzo intelectual que hicieron, las llevó a incrementar la cantidad y calidad de sus competencias matemáticas (cfr. 4.6).

4.5. La evaluación al servicio del aprendizaje

Durante los últimos años, las prácticas pedagógicas han elevado su calidad, y las investigaciones reflejan que se ha pasado de una evaluación parcelada e inconexa, a otra integradora, que busca la unidad del proceso de enseñanza y aprendizaje. Los *modos de evaluación en matemática han evolucionado* mucho:

- ❖ antes, se buscaba que el alumno dominara las diversas *técnicas de cálculo,* es decir, se centraba en los aspectos procedimentales;
- ❖ ahora, se impulsa al estudiante a adquirir *competencias matemáticas* a lo largo de toda su escolaridad, unificando los aspectos conceptuales, procedimentales y actitudinales.

4.5.1. Modos de evaluar

En esta investigación *se experimentaron positivamente las nuevas orientaciones* para la evaluación de la matemática de secundaria. En los próximos párrafos se detalla cómo se llevó a cabo y cuáles fueron los resultados del proceso de evaluación durante la aplicación de la Unidad Didáctica sobre función afín.

El proceso de aprendizaje implicó un establecimiento de relaciones con significado a partir de los conocimientos previos de las alumnas. Las *dos dimensiones de la evaluación* como vía para el aprendizaje, fueron:

- ❖ la *certificativa,* que respondió a las exigencias sociales; se asignó una calificación final a los logros de cada alumna, gracias a las notas de las tareas y de la prueba final, recopiladas por la profesora;
- ❖ la *formativa ó reguladora* adaptada a cada alumna para orientarla y potenciarla en su propio proceso de aprendizaje significativo.

Durante la aplicación de la Unidad Didáctica sobre función afín, *la evaluación recorrió tres grandes etapas:*

- la *inicial,* para detectar los conocimientos previos en las estudiantes;
- la *de seguimiento* de la profesora (la más extensa en tiempo) mediante las observaciones y los registros de los avances del aprendizaje (del grupo y de cada estudiante); y, también, por los comentarios orientadores a las tareas individuales que se corrigieron;
- la que se dio *al término* de la Unidad Didáctica para estimar el logro de las competencias matemáticas.

En todas las dimensiones y etapas de la evaluación se promovió el *aprendizaje significativo sobre la función afín a través de los errores y dificultades* por las que pasaron las estudiantes.

4.5.2. Contexto de la evaluación

La *comunicación entre los participantes* asumió un lugar fundamental en la evaluación formativa que está al servicio del aprendizaje: la interacción profesora-alumnas se dio en un clima de confianza muy beneficioso.

La *actuación evaluativa del docente* durante la aplicación de la Unidad Didáctica, se realizó con instrumentos y tareas concretas, las cuales se describen a continuación:

- *observaciones* del trabajo realizado en cada clase, y, *recopilación* de las mismas en las notas o diario de trabajo de la profesora;
- *correcciones* detalladas de las tareas individuales, y *análisis* de los cuadernos de apuntes de las estudiantes;
- *captación de los errores* recursivos en las alumnas, y *reconocimiento* de las dificultades presentes en ellas para asimilar el tema de función afín;
- *reflexiones diarias* sobre el propio estilo de enseñanza, la metodología utilizada en el aula, y los correctivos aplicados para lograr un aprendizaje eficaz.

Como se puede observar, la actuación evaluativa del docente fue consecuencia de *mucha dedicación de tiempo* y de *mucho esfuerzo para mejorar la calidad de la evaluación.*

Se profundizó en *la relación directa de un proceso evaluativo de calidad con un proceso de aprendizaje de calidad*. Por ello, en el trabajo diario del docente fue crucial tener presentes:

- la *intención* de cada actividad utilizada en el aula;
- *la finalidad* de los diferentes modos e instrumentos de evaluación.

La *evaluación de la prueba final en dos fases* ayudó a las estudiantes a reflexionar sobre sus propios errores y dificultades en beneficio de un aprendizaje de calidad más significativo, lo cual se evidenció en cada una de las fases:

- en la primera, la alumna puso de manifiesto tanto *las competencias logradas como los errores y dificultades no superados*, y los comentarios de la profesora a las respuestas escritas fueron luces para la *autoreflexión de las estudiantes* sobre su propio aprendizaje;
- en la segunda, la alumna basada en los comentarios orientadores del docente repitió las preguntas cuyo contenido no dominaba para *consolidar las competencias,* las cuales fueron evaluadas de nuevo.

4.6. Competencias matemáticas

El proceso educativo está orientado a que los alumnos *adquieran las competencias matemáticas necesarias* para el desempeño en sus tareas cotidianas, por ello es clave determinar los modos de medirlas al finalizar un ciclo de clases o al término de la aplicación de una Unidad Didáctica. En los siguientes apartados se desarrollan estos aspectos para la Unidad Didáctica aplicada sobre función afín.

4.6.1. Instrumento para medir competencias [92]

A *la prueba final de evaluación* que presenta la Unidad Didáctica (cfr. ANEXO 1), elaborada con gran detenimiento para abarcar los diversos niveles de dificultad y tipos de preguntas

[92] De las 25 pruebas finales de las alumnas del grupo principal, se eligieron 15 para analizarlas con la rejilla; como se dijo en el capítulo anterior, la escala de valoración fue de 1 a 5.

sobre la función afín, se le aplicó el *instrumento de evaluación de competencias* (cfr. ANEXO 5). De las 25 pruebas finales de las alumnas del grupo principal, se eligieron 15 para analizarlas con la rejilla; como se dijo en el capítulo anterior, la escala de valoración fue del 1 a 5.

Se comprobó la riqueza de *la rejilla* como instrumento *para detectar el nivel de adquisición* (por alumna) *de las competencias matemáticas* referentes al álgebra, y en concreto sobre función afín. Con un vistazo a los resultados obtenidos en la rejilla, el *docente fue capaz de detectar* el nivel de logro de las competencias matemáticas inmediatamente en cada alumna (cfr. ANEXO 8). Para rellenar la rejilla (cfr. 3.2.3.2. y 3.3.3.2):

- *se utilizó el cuadro que reordenaba* las preguntas de las prueba respecto al nivel de dificultad y al tipo de pregunta (cfr. ANEXO 4);
- *se cuantificó el aprendizaje por alumna, por nivel y tipo de pregunta, según las respuestas a las preguntas de la prueba*. (cfr. ANEXO 5).

El nivel de competencias logradas en cada alumna, según este instrumento, *es una magnífica ayuda para el docente* en la orientación del proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes durante la aplicación de otras Unidades Didácticas.

Los resultados contenidos en la rejilla son un *aporte importante para la toma de decisiones* de los protagonistas del proceso: se sugiere analizar con este instrumento una o dos pruebas a lo largo del año escolar para lograr una mayor efectividad en la calidad del proceso de aprendizaje.

El *seguimiento de las competencias logradas* por las alumnas a partir de los resultados de la rejilla no pudo desarrollarse en este trabajo de investigación debido al tiempo limitado de la experiencia.

4.6.2. Competencias adquiridas

Las alumnas, *protagonistas de su propio aprendizaje*, incrementaron la cantidad y calidad de competencias matemáticas relacionadas con el *contenido algebraico* de la función afín; se destacan las que se observaron, de forma particular, durante la presente investigación:

- la *conexión flexible* entre los diversos lenguajes matemáticos (verbal, tabular, algebraico y gráfico);
- el crecimiento en la *visualización geométrica* y en el *razonamiento matemático*;
- el *reconocimiento,* en situaciones cotidianas, de la presencia de fenómenos modelados por la función afín;
- la *interpretación de* los conceptos básicos sobre la función afín (pendiente y ordenada en el origen), y de las propiedades estudiadas (paralelismo, perpendicularidad, pertenencia de un punto a una recta);
- la *comunicación,* mediante la expresión oral y la escrita, de los nuevos conceptos asimilados y de los razonamientos matemáticos utilizados;
- la importancia del uso adecuado de la *notación y terminología matemática*; así como de las *correctas secuencias de razonamientos coherentes*;
- el *reconocimiento del sentido* de la relación entre magnitudes susceptibles de ser tratadas como funciones afines y que aparecen en situaciones cotidianas;
- la mayor facilidad para *resolver problemas* (cerrados y abiertos), con autonomía creativa, donde estuvo involucrado el concepto de función afín;
- la consolidación de una *actitud de confianza en la utilidad de las matemáticas*.

4.7. Otras variables didácticas de la experiencia

Se comprobó como la *incertidumbre es un elemento central en las investigaciones cualitativas*, ya que el investigador-docente fue comprendiendo mejor el problema educativo planteado a medida que avanzaba su estudio. Se comenzó el estudio didáctico con algunas ideas generales, que se fueron precisando progresivamente. El análisis de los resultados y las propuestas pedagógicas de este trabajo de investigación fueron emergiendo de la misma experiencia.

4.7.1. Variables a mejorar

Las ventajas de la *incorporación de las tecnologías de la información y comunicación* (TIC´S) como herramienta de aprendizaje (cfr. ANEXO 1, Actividad Nº 7) se podrían haber potenciado mucho más, para ello se hacía indispensable un mayor apoyo técnico de la institución educativa, y la disponibilidad de laboratorios de computación [93].

4.7.2. Variables a estudiar

Se describen algunas variables que habría que seguir analizando para tomar decisiones importantes a nivel de la enseñanza de la matemática de 9º grado en el país:

- el *factor tiempo*, el número de clases semanales aprobadas por el Ministerio de Educación son tres horas académicas, lo cual se considera insuficiente para el contenido curricular del curso y, concretamente, para poder aplicar la recién diseñada Unidad Didáctica de función afín en 9º grado;
- el *factor cantidad de alumnos por aula* se presenta al docente como un reto respecto al manejo de las nuevas metodologías sugeridas en la Unidad Didáctica sobre función afín;
- el *factor competencia docente*, es perentoria la preparación profesional de los docentes actuales de las instituciones públicas y privadas del país, para lograr una mejora efectiva del proceso de enseñanza y aprendizaje en temas de álgebra; esto requiere colocar el plan de mejoramiento profesional en un lugar prioritario respecto a las inversiones económicas de las instituciones educativas, no siempre fácil de conseguir.

[93] La actividad Nº 7 la dirigió la profesora en una sola computadora, hubiera sido mucho más ventajoso, desde el aspecto educativo, que cada estudiante hubiera manipulado los parámetros que allí se señalan.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALEGRÍA, Rebeca, Janet Escobar, Marta García y Yolanda Martínez (2004, Diciembre). *Una Unidad Didáctica sobre la función afín para 9º grado*. Trabajo para la evaluación del curso de *Curriculo en Matemática* de la Especialización en Didáctica de la Matemática en Secundaria, USB, Caracas, Venezuela.

AMELII, María Rita y José Lemmo (2002). *Matemática 9*, 2ª edición, Editorial Salesiana, Caracas.

ARDILA, Victor Hernando y Blanca Nubia Torres, (2001). *Olimpiadas matemática 9,* Editorial Excelencia. Caracas.

ARIAS, José María y Ildefonso Maza (1998). *1 Bachillerato Matemáticas,* 2ª edición, Editorial Casals, Barcelona.

AUSUBEL, David Paúl (1976). *Psicología evolutiva. Un punto de vista cognoscitivo*. México, Editorial Trillas.

AZCÁRATE, Carmen y Jordi Deulofeu (1990). *Funciones y Gráficas*, Madrid, Editorial Síntesis.

BENÍTEZ PÉREZ, Alma Alicia, *La escala como factor fundamental para construir la expresión algebraica. El caso de la recta,* en *Actas de la décimo cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 14), México, 2001, pp. 428-431.

BEYER, Walter, *El significado en matemática: un problema didáctico,* en *Actas de la décimo cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 14), Venezuela, 2001, pp. 583-589.

BRAVO DE LAS CASAS, Eduardo Ramón, *Enseñanza significativa de la matemática en las carreras de ciencias técnicas,* en *Actas de la décimo cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 14), Cuba, 2001, pp. 281-286.

CALDERÓN ARIOSA, Regla Margarita y Beatriz Deiros Fraga, *Evaluación del aprendizaje de las matemáticas,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), Cuba, 2003, pp. 329-333.

CALLEJO, María Luz (1992). Orientaciones para la Elaboración de Unidades Didácticas. Área de Matemáticas, Monografías nº 13. Documentos I.E.P.S.

CAMARENA GALLARDO, Patricia, *La matemática en el contexto de las ciencias: fase didáctica,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), México, 2003, pp. 46-53.

CANTORAL, Ricardo y Gisela Montiel, *Visualización y pensamiento matemático,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), México, 2003, pp. 694-701.

CANTORAL, Ricardo, *Sobre la articulación del Discurso Escolar y sus Efectos Didácticos*, en *Actas de la décimo cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 14), México, 2001, pp. 64-67.

CARLAVILLA FERNÁNDEZ, José Luis y Gabriel Fernández García (2004). *Historia de las Matemáticas.* Granada, Editorial Proyecto Sur, 2ª edición.

CASTILLO ALFARO, Thais, *Diseño de instrumentos de evaluación de los aprendizajes*, en *Actas de la décimo cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 14), Costa Rica, 2001, pp. 100-106.

COLMENÁREZ TOVAR, Dones Gregorio y Martín Andonegui Zabala, *Análisis de los procesos deductivos en Geometría,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), Venezuela, 2003, pp. 140-146.

CORDERO, Francisco, Bronisuawe Czamocha, Leonora Díaz, Verónica Díaz y Álvaro Poblete, *El papel de la sociocultura en la didáctica de la matemática,* en *Actas de la décimo cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 14), México-EUA-Chile, 2001, pp. 618-625.

CRESPO CRESPO, Cecilia y Christiane Ponteville, *El concepto de función: su comprensión y análisis*, en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), Argentina, 2003, pp. 235-241.

DOLORES FLORES, Crisólogo, *El análisis de funciones y las concepciones alternativas que de ese proceso se generan,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), México, 2003, pp. 40-45.

DOLORES FLORES, Crisólogo, *Concepciones alternativas que, referentes al comportamiento variacional de funciones, manifiestan profesores de bachillerato,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), México, 2003, pp. 450-456.

DOLORES FLORES, Crisólogo, *El desarrollo del pensamiento variacional con estudiantes universitarios*, en *Actas de la décimo cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 14), México, 2001, pp. 337-345.

ELLIOT, John (1997). *El cambio educativo desde la investigación-acción*, Madrid, Editorial Morata.

FARFÁN, Rosa María, *Tradiciones y paradigmas de investigación en matemática educativa,* en *Actas de la décimo cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 14), México, 2001, pp.131-140.

FARFÁN, Rosa María, Asuman Oktac y Andrés Rivera, *El obstáculo del formalismo y los modos de pensamiento en el caso de transformaciones lineales,* en *Actas de la décimo cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 14), México, 2001, pp. 353-361.

FARFÁN MÁRQUEZ, Rosa María, *Ingeniería didáctica. Un ejemplo construido para la función* 2^x*,* en *Actas de la décimo cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 14), México, 2001, pp. 408-415.

FERRARI ESCOLÁ, Marcela y Gustavo Martínez, *Construcción de funciones con calculadoras graficadoras,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), México, 2003, pp. 710-715.

GARCÍA, Marta (2005, Junio). *Investigación en Didáctica matemática: esbozo del planteamiento del problema y metodología investigativa*. Trabajo para la evaluación de los cursos de *Formación de docentes* e *Investigación en Didáctica de las Matemáticas* curso de *Evaluación en Matemática* de la Especialización en Didáctica de la Matemática en Secundaria, USB, Caracas, Venezuela.

GARCÍA, Marta (2005, Junio). *Una reflexión sobre el impacto del trabajo de investigación en Didáctica matemática*. 2005. Trabajo para la evaluación de los cursos de *Formación de docentes* e *Investigación en Didáctica de las Matemáticas* de la Especialización en Didáctica de la Matemática en Secundaria, USB, Caracas, Venezuela.

GARCÍA, Marta (2005, Marzo). *Una evaluación a 9º grado: Función Afín. Análisis cuantitativo y cualitativo.* Trabajo para la evaluación del curso de *Evaluación en Matemática* de la Especialización en Didáctica de la Matemática en Secundaria, USB, Caracas, Venezuela.

GATICA, Stella Nora, *Observaciones sobre las soluciones a una tarea de inecuaciones lineales en dos variables realizadas por estudiantes de secundaria,* en *Actas de la décimo cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 14), Argentina, 2001, pp. 216-224.

GIMÉNEZ, Joaquín (2005, Enero-febrero). Apuntes tomados y guías entregadas al dictar el curso de *Evaluación en Matemática* de la Especialización en Didáctica de la Matemática en Secundaria, USB, Caracas, Venezuela.

GIMENO SACRISTÁN, José (1983). Planificación de la investigación educativa y su impacto en la realidad, en *La Enseñanza: entre su teoría y práctica*, Madrid, Editorial Akal, pp. 166-187.

GÓMEZ-CHACÓN, Inés María (2005, Junio). Apuntes y Guías entregadas por la profesora durante los cursos de *Formación de Docentes* e *Investigación en Didáctica de las Matemáticas* de la Especialización en Didáctica de la Matemática en Secundaria, USB, Caracas, Venezuela.

GÓMEZ-CHACÓN, Inés María (1998). Una metodología cualitativa para el estudio de las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas. En: *Enseñanza de las Ciencias* 16 (3), ICE de la Universidad Atónoma de Barcelona, Barcelona, pp. 431-450.

GUINEO COBS, Gladys Elisa, *Investigación –Acción: Una experiencia en Aula – Taller,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), Uruguay, 2003, pp. 796-802.

GUZMÁN, Ismenia, Reflexión sobre la calidad de la actividad matemática en el aula, en Actas de la décimo cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 14), Chile, 2001, pp. 22-25.

HINDS, John, (2002). *Matemática 9. Edición especial para el docente*, Editorial Premier. S.R.L. Caracas.

KEMMIS, Stephen y Robin McTaggart, (1988), *Cómo planificar la investigación-acción*. Editorial Laertes, Barcelona.

JUÁREZ LÓPEZ, Juan Antonio, *La comprensión del concepto de variable en profesore de matemáticas de secundaria,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), México, 2003, pp. 472-478.

LESTÓN IELMINI, Patricia. y Daniela Cecicila Veiga Tomatis, *Los primeros errores en la formación docente,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), Argentina, 2003, pp. 669-675.

MARÍN, Margarita (2004, Noviembre). Apuntes tomados y guías entregadas al dictar el curso de *Currículo en Matemática* de la Especialización en Didáctica de la Matemática en Secundaria, USB, Caracas, Venezuela.

MARTÍNEZ MARTÍNEZ, Dámasa, *La significatividad didáctica para la aprehensión del concepto de función en la carrera licenciatura en economía,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), Cuba, 2003, pp. 271-277.

Ministerio de Educación (1987). *Currículum Básico Nacional*. Programa de estudios de Educación Básica. Tercera Etapa. Caracas.

NCTM (2000), *Principios y Estándares para la Educación Matemática,* Primera edición en castellano traducida por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

PERALTA GARCÍA, Julia Xochilt y José Luis Soto Munguía, *Dificultades para articular los registros gráfico, algebraico y tabular: el caso de la función lineal,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), México, 2003, pp. 720-727.

PÉREZ YÁNEZ, Jenny María y Martín Andonegui Zabala, *Análisis de los contenidos geométricos de los libros de texto de matemática de educación básica a la luz de los planteamientos teóricos del modelo de Van Hiele,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), Venezuela, 2003, pp. 154-160.

PÉREZ ZÁRATE, Juana Inés, *Acerca de las relaciones entre errores algebraicos y obstáculos epistemológicos,* en *Actas de la décimo cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 14), México, 2001, pp. 311-317.

PINTO SOSA, Jesús Enrique, Perfil del profesor promedio en Matemáticas del nivel secundaria, en Actas de la décimo cuarta Reunión Latinoamérica de Matemática Educativa, RELME 14, México, 2001, pp.473-483.

PRUZZO, Vilma y Graciela Di Franco (2003). Paradigmas y enfoques metodológicos de la investigación educativa. En: XIV Encuentro sobre el estado de la investigación educativa. [En línea], [fecha de consulta: 7 julio 2005]. Disponible en: http:// www. uccor. edu. ar / paginas / REDUC / schwartz2.pdf.

RICO, Luis (Coord.) (1997). *La Educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona, Editorial Horsori.

RODRÍGUEZ PONCE, María del Carmen, *Compartir significados sin esperar milagros,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), Cuba, 2003, pp. 760-764.

ROJAS TORRES, Ana Cecilia y Martín Andonegui Zabala, *Evaluación de la enseñanza de la geometría utilizando un software asistente de geometría,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), Venezuela, 2003, pp. 133-139.

RUÍZ HIGUERAS, Luisa (2004, Marzo)a. La transposición didáctica: del saber científico al saber enseñado, Guía entregada por la autora al dictar el curso de *Didáctica de las Matemáticas* de la Especialización en Didáctica de la Matemática en Secundaria, USB, Caracas, Venezuela.

RUÍZ HIGUERAS, Luisa (2004, Marzo)b. La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico, Guía entregada por la autora al dictar el curso de *Epistemología de las Matemáticas I* de la Especialización en Didáctica de la Matemática en Secundaria, USB, Caracas, Venezuela.

RUÍZ HIGUERAS, Luisa, (2004, Marzo)c. Apuntes tomados y guías entregadas al dictar el curso de *Didáctica de las Matemáticas* y *Epistemología matemática I* de la Especialización en Didáctica de la Matemática en Secundaria, USB, Caracas, Venezuela.

RUÍZ HIGUERAS, Luisa (1998). La didactificación de un objeto matemático. El caso de la noción de función, en *El futuro del cálculo infinitesimal,* ICME-8, Revista de la SAEM Thales, Sevilla (España), Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 268-269.

RUÍZ MÁRQUEZ, David Warren, *Uso de la tecnología en un contexto constructivista. El caso del cálculo de varias variables,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), México, 2003, pp. 730-734.

SAAVEDRA, Carlos y Patricio Rosen, *Modelo didáctico alternativo para la ecuación de la recta,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), México, 2003, pp. 80-86.

SALINAS LÓPEZ, Ciria, *Un estudio sobre la evolución de las ideas variacionales en los cursos preparatorios al cálculo*, en *Actas de la décimo cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 14), México, 2001, pp. 552-555.

SANTOS, Leonor (2004). La evaluación del aprendizaje en Matemáticas: orientaciones y retos. En: La actividad matemática en el aula: homenaje a Paulo Abrantes, Coordinado por Joao Pedro da Ponte, Joaquim Giménez y Leonor Santos, p. 157-176. [En línea], [fecha de consulta: 14 febrero 2005]. Disponible en: http:// www. ub.edu / multimedia / iem / down / c11 / Distance_In_Service.pdf.

Sociedad Andaluza de Profesores de Matemática, *Definición de funciones afines*. [En línea], [fecha de consulta: 12 diciembre 2004]. Disponible en: http:// www. juntadeandalucia.es / averroes / iesarroyo / matematicas / materiales / 3eso / funciones / teoriafuncionesafines / teorifuncionesafines. htm.

Sociedad Andaluza de Profesores de Matemática, *Problemas sobre la función afín*. [En línea], [fecha de consulta: 12 diciembre 2004]. Disponible en: http:// www. juntadeandalucia.es / averroes / iesarroyo / matematicas / materiales / 3eso / funciones / teoriafuncionesafines / teorifuncionesafines. htm.

SUÁREZ BRACHO, Estrella y Darío Durán Cepeda, (2003). *Matemática 9º,* Editorial Santillana, Caracas.

TORRES PAGÁN, Leonardo, *Las matemáticas integradas en contexto,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), Puerto Rico, 2003, pp. 340-345.

Universidad Abierta de Cataluña, *Test Autoevaluaciò Funció afí.* [En línea], [fecha de consulta: 14 Febrero 2005]. Disponible en http: // www. edu365. com /aulanet / intermates / 30/ webs /autoevaluacio / test. htm.

Universidad Católica Andrés Bello (sin fecha). *Material de Apoyo de los Talleres de Capacitación docente*. Caracas.

VELÁSQUEZ BUSTAMANTE, Santiago Raminro, Carlos Flores, Gerardo García, Enrique Gómez y Hermes Hesiquio, *Desarrollo de habilidades matemáticas y formación de profesores,* en *Actas de la décimo sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 16), Universidad autónoma de Guerrero y Centro de Investigación y desarrollo educativo, 2003, pp. 627-634.

VILLALOBOS MARTÍNEZ, Amelia, *Identificación de obstáculos en la construcción de gráficas de funciones,* en *Actas de la décimo cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELME 14), México, 2001, pp. 396-399.

ANEXO 1

UNA UNIDAD DIDACTICA SOBRE FUNCIÓN AFÍN

INDICE

Guía del profesor

Introducción

El Sistema Educativo Venezolano presenta una problemática, muchos docentes con las mejores intenciones ofrecen una educación basada en la cantidad de contenidos procesados y no en la calidad de ellos. En la actualidad se trata de incorporar al sistema educativo una nueva corriente para la enseñanza de la matemática, la cual propone la construcción del conocimiento por parte del alumno.

La Unidad Didáctica desarrollada sirve como material de apoyo para los docentes que dicten cursos donde esté programado el contenido de la función afín. Se presentan los objetivos y las actividades para el logro de los mismos, el estilo de enseñanza que subyace lleva a los alumnos a comprometerse con su propio aprendizaje, tomando como punto de partida los conocimientos previos que posee.

Esta Unidad Didáctica ha de adaptarse al tiempo disponible, al nivel de preparación de los estudiantes y a todos los aspectos que influyan a la hora de impartir el contenido de función afín. Por tanto, cada profesor puede seleccionar las actividades que llevará al aula, e incluso puede variarlas. En todo caso, esta Unidad Didáctica representa un recurso al docente interesado en mejorar la calidad del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Está dirigida a profesores de matemáticas en ejercicio, especialmente a aquellos que imparten clases a alumnos de 9º grado de la III Etapa de Educación Básica (alumnos de edades comprendidas entre 13-15 años).

En cada actividad se indica cómo procederá el docente (exposición, profesor-guía, se indica la tarea para la casa y cómo dirigir la puesta en común de las conclusiones, etc.), cuál será la actuación del estudiante, y en que conceptos y procedimientos se hace hincapié.

Aprender y enseñar matemática es un reto de todo docente en ejercicio. Para lograr este objetivo es importante experimentar actividades, procesos de pensamiento y reflexionar sobre ellos: esto es algo tan personal que nadie puede realizar por uno, ni siquiera el autor de la Unidad Didáctica.

La potencia de aprendizaje de los estudiantes depende en gran parte de la preparación del docente y de la calidad de la enseñanza que imparte. Se necesita mucha perseverancia, ánimo y actitud positiva para provocar, apoyar y mantener el empeño en el aula para optimizar los procesos enseñanza y aprendizaje.

Objetivos Generales y Específicos

Objetivo General: Estudiar funciones reales (tomado del programa oficial vigente de 9º grado de la III Etapa de Educación Básica, p. 136).

Objetivo Específico: Analizar las características de la función afín (tomados del programa oficial vigente, objetivo nº 17).

Objetivo General Propuesto: Interpretación de fenómenos físicos, sociales, biológicos, entre otros, que se puedan expresar por medio de la función afín.

Objetivos Específicos Propuestos:

Objetivos	Tipo
Reconocer los elementos de una función afín (variable independiente, dependiente, ordenada en el origen y pendiente) en los diferentes lenguajes matemáticos (verbal, tabular, algebraico y gráfico).	Conceptual
Interpretar el significado de los elementos de la función afín.	Conceptual
Establecer los diferentes casos de la función afín.	Procedimental
Determinar los puntos de corte de la función afín con los ejes de coordenadas del plano cartesiano.	Procedimental
Construir los diferentes tipos de representación de la función afín, a partir de una de ellas.	Procedimental
Descubrir las propiedades básicas de las rectas (pendiente, perpendicularidad, paralelismo, pertenencia de puntos).	Procedimental
Hallar la ecuación de la recta dados dos puntos pertenecientes a ella.	Procedimental
Hallar la ecuación de la recta dado un punto y la pendiente.	Procedimental
Hallar la ecuación de la recta dado un punto de ella y la ecuación de una recta paralela a ella.	Procedimental
Hallar la ecuación de la recta dado un punto de ella y la ecuación de una recta perpendicular a ella.	Procedimental
Hallar la ecuación general de una recta conocida la función afín correspondiente.	Procedimental
Traducir con flexibilidad la ecuación de la recta de un lenguaje a otro (verbal, tabular, algebraico y gráfico).	Conceptual
Reconocer e interpretar relaciones entre magnitudes susceptibles de ser tratadas como funciones afines y que aparecen en situaciones cotidianas.	Actitudinal
Resolver problemas donde se involucre el concepto de función afín.	Actitudinal
Interés en la búsqueda de diferentes formas de obtener un mismo resultado.	Actitudinal
Manifestar una actitud critica ante la solución de un problema.	Actitudinal
Valorar el trabajo en equipo como medio para adquirir y producir conocimiento.	Actitudinal
Fomentar la cooperación y el compañerismo.	Actitudinal

Selección de los contenidos

Clasificación de los contenidos matemáticos

Conceptuales:

- Función afín
- Pendiente de la recta
- Pertenencia de un punto a una recta
- Plano cartesiano
- Ordenada y abscisa
- Variable independiente
- Variable dependiente
- Rectas paralelas
- Rectas perpendiculares
- Rectas secantes
- Rectas paralelas a los ejes de coordenadas
- Familia de rectas paralelas
- Haz de rectas secantes
- Puntos de corte con los ejes de un plano cartesiano.

Procedimentales:

- Identificación, en sus diferentes representaciones, de una función afín de otra que no lo es.
- Relaciones entre los tipos de representaciones de la función afín.
- Cálculo e interpretación de la pendiente de una recta.
- Cálculo e interpretación de la ordenada en el origen.
- Cálculo e interpretación de los puntos de corte con los ejes del plano cartesiano
- Obtención de las diferentes representaciones de una recta conocida la representación de ella en uno de los lenguajes matemáticos (verbal, tabular, algebraica o gráfica).
- Reconocimiento de una relación de proporcionalidad directa dada a través de un enunciado, una tabla, un gráfico o una expresión algebraica (fórmula).
- Descripción de las principales propiedades de una recta a través de su interpretación gráfica.

Actitudinales:

- Valoración del orden, precisión, trabajo metódico y utilidad del lenguaje gráfico y algebraico.
- Reconocimiento y valoración crítica de las relaciones entre el lenguaje verbal, tabular, gráfico y algebraico aplicado a situaciones cotidianas que pueden ser representadas por medio de una función afín.
- Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas que se expresen con una función afín.
- Curiosidad por las interrelaciones que se establecen entre la matemática y el mundo real.

- Interpretación correcta de fenómenos cotidianos que pueden ser representados por medio de una función afín.
- Manifestación de constancia para lograr el éxito en la actividad emprendida.

Destrezas:

- Representación de gráficas a escalas.
- Operación con números reales.
- Traducción entre los lenguajes verbal, tabular, algebraico y gráfico.
- Reconocimiento e interpretación de la función afín en situaciones de la vida cotidiana en los que la relación de la variación entre dos magnitudes es constante.
- Utilización de los instrumentos de medida / cálculo de promedios.

Estrategias:

- Trabajar en pequeños grupos, orientados por el profesor.
- Suscitar interrogantes.
- Entablar debates, donde el profesor sea el moderador y orientador.
- Hacer reflexiones y puestas en común sobre las actividades planteadas en clase.
- Plantear situaciones con las que los estudiantes capten la aplicación concreta de las matemáticas en situaciones de su entorno cotidiano y de ámbito real.
- Usar la tecnología en actividades de exploración para interpretar el significado de los elementos de la función afín.
- Utilizar hechos históricos para que el aprendizaje sea significativo.
- Proponer actividades experimentales a los alumnos, las cuales permiten medir, enseñar, elaborar conjeturas, determinar proposiciones y representar simbólicamente los resultados obtenidos.

Hechos:

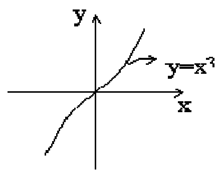
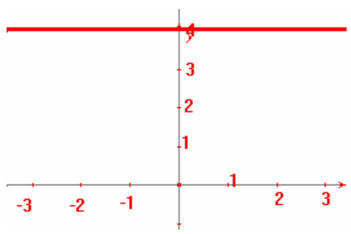
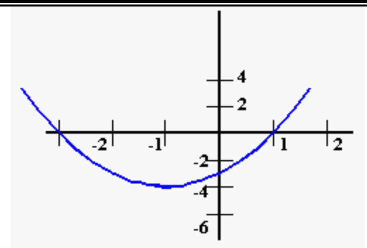
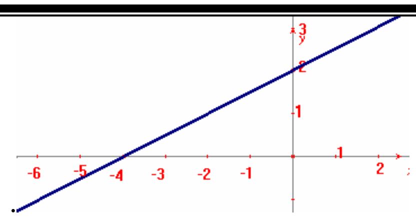
- Plano cartesiano
- Tipos de rectas
- Ubicación de puntos en el plano
- Variable dependiente e independiente
- Proporción de crecimiento horizontal y vertical
- Magnitudes geométricas (longitud)

Selección de Actividades de Aula y Recursos

__**Actividad Nº 1**__: Motivación y exploración inicial.

Titulo: ¿Recuerdas la función afín?

Texto: Identifica, junto con tus compañeros, las funciones afines que aparecen en el cuadro. Explica con tus propias palabras el motivo por el cual descubriste si es o no una función afín. Al final, comentarás con tus compañeros de clase tus conclusiones.

<table>
<tr><td>$y = 3x + 2$</td><td>$w = a^3$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$5y + 8 = 3x + y$</td></tr>
<tr><td>$d = \frac{3}{8} r$</td><td>$y = -5x^2$</td></tr>
<tr><td><table><tr><td>x</td><td>0</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>y</td><td>0</td><td>4</td><td>9</td></tr></table></td><td><table><tr><td>p</td><td>s</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$y = 7 - \frac{1}{2} . x$</td></tr>
</table>

Intenciones: Diagnosticar los conocimientos previos que poseen los alumnos sobre la identificación de funciones afín en sus diversas representaciones. Valorar las potencialidades de los estudiantes para trabajar en pequeños grupos y las capacidades para comunicar los propios argumentos en la puesta en común de las conclusiones de la tarea.

Comentarios: Se forman grupos de 2 o 3 estudiantes. Se les entrega una hoja con las funciones o se dibujan las mismas en la pizarra. Se les darán unos 15 minutos para el trabajo en equipo y después con la ayuda del profesor como moderador se llevará a cabo la puesta en común de las conclusiones obtenidas. Al final, el profesor hará una recapitulación con discernimiento de las conclusiones correctas e incorrectas. En algunos casos, se expresan las variables dependientes e independientes con letras diferentes a las acostumbradas (x, y).

Fuente: Elaboración propia.

Actividad Nº 2: Desarrollo de nuevas ideas.

Título: Descubriendo el número ∏.

Materiales: Tapas circulares de diferentes tamaños, pabilo, cinta métrica y hoja de papel.

Texto: Usando tapas circulares de diferentes tamaños, pabilo y cinta métrica, mide el perímetro y el diámetro de las tapas, y coloca dichas magnitudes en las dos primeras columnas de la tabla. A continuación, rellena la última columna de la tabla dividiendo las magnitudes de la primera columna entre las de la segunda. Realiza al menos diez mediciones.

Diámetro	Longitud (perímetro)	Longitud / Diámetro

Intenciones: Tomar medidas de longitud manejando objetos en situaciones concretas. Practicar la estimación y la medida en centímetros. Registrar y organizar la información recogida en una tabla, determinar la relación entre magnitudes. Inferir la fórmula de la longitud de la circunferencia en función del diámetro. Valorar el trabajo individual como una forma de desarrollar la confianza en sí mismo y la autonomía ante situaciones concretas.

Comentarios: Después de determinar la razón o proporción entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, el profesor ayudará a que los alumnos reflexionen a través de las siguientes preguntas, ¿cúal es el resultado de la división de magnitudes de cada tapa? ¿observas alguna relación entre los parámetros obtenidos en la tercera columna? ¿podrías dar una explicación de ello? ¿podrías obtener una expresión algebraica o fórmula que relacione la longitud en función del diámetro?. Es preferible que esta actividad la realicen como tarea para casa y se discuta en clase durante la siguiente sesión. El matemático griego Arquímedes fue el que calculó una mejor aproximación del número ∏ ($3 + 10/71 < ∏ < 3 + 10/70$) en la antiguedad.

Fuente: Material de apoyo, talleres de capacitación docente de la UCAB Universidad Católica Andrés Bello. (Adaptado).

Actividad Nº 3: Desarrollo de nuevas ideas

Título: Descubriendo más relaciones

Texto: En la hoja de papel milimetrado, representa en el eje de coordenadas los puntos (D, L) utilizando los datos de la tabla de la actividad anterior y a continuación une los puntos obtenidos (D valor de la abcisa y L valor de la ordenada). ¡Cuidado con las escalas de las magnitudes al graficar! ¿Cómo es la línea que obtuviste al unir los puntos?

Intenciones: Representar puntos en el eje de coordenadas cartesianas, determinar el tipo de función representada, contrastar la relación L/D con la representación gráfica, iniciar el concepto de pendiente. Apreciar los recursos que brinda la naturaleza para elaborar y resolver problemas. Despertar la curiosidad e interés por descubrir regularidades y establecer relaciones.

Comentarios: Se necesitan hojas de papel milimetrado para esta actividad. Una vez que los alumnos representaron gráficamente la función, se les hace reflexionar a través de las siguientes preguntas, ¿cómo es la representación gráfica de la función?. Compara los dos tipos de representaciones (tabular, gráfica). Inferir la relación (L/D) = ∏, con la función L(D). Longitud/diámetro = Y/X = Constante. ¿El resultado de la función constante depende de los valores de X e Y? Busca introducir la noción de pendiente como inclinación de la gráfica y la expresión algebraica de la función afín L (D) = ∏. D

Fuente: UCAB, Material de apoyo, talleres de capacitación docente de la Universidad Católica Andrés Bello. (Adaptado).

Actividad Nº 4: Desarrollo de nuevas ideas

Título: Expresemos de forma algebraica

Texto: Calcula el promedio de resultados de la tercera columna de la tabla de la Actividad Nº 2 (relación L/D). ¿Puedes hallar una expresión algebraica o fórmula común que relacione la longitud (L) en función del diámetro (D)? Es decir, L(D) = ____ .

Intenciones: Obtener la expresión algebraica de la función afín a partir de la representación tabular. Reconocer que la función afín tiene diferentes representaciones (tabular, algebraica y gráfica).

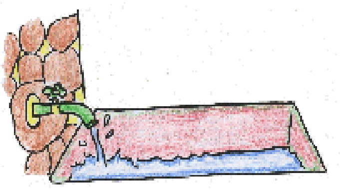
Comentarios: Comprender la expresión algebraica que une la relación de las magnitudes trabajadas. Valorar las posibilidades que brinda el lenguaje matemático para interpretar, representar, conocer mejor y comunicar situaciones reales. Esta actividad se puede hacer en grupos de 2 ó 3 personas en el aula de clase.

Fuente: UCAB, Material de apoyo, talleres de capacitación docente de la Universidad Católica Andrés Bello. (Adaptado).

Actividad Nº 5: Desarrollo de nuevas ideas.

Título: Llena la piscina

Texto: Una piscina se llena con un grifo que vierte 5 litros de agua por minuto. La cantidad de agua que llena la piscina son 5.000 litros de agua.



Consideremos los siguientes casos:

a. Si el volumen inicial de la piscina fuera 0 litros: Completa la tabla que relaciona la magnitud tiempo transcurrido con la del volumen de agua en la piscina. Realiza la representación gráfica y deduce la fórmula que expresa la relación entre el volumen y el tiempo.

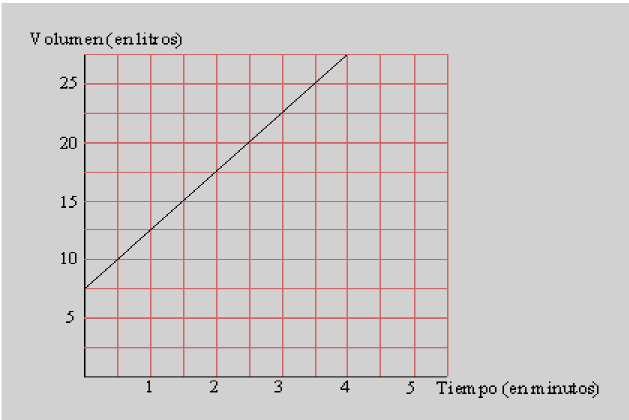
Tiempo (min.)	0	1	4	…	t
Volumen (lit.)					

b. Si el volumen inicial fuera de 200 litros. Completa la tabla que relaciona la magnitud tiempo transcurrido con la del volumen de agua en la piscina. Realiza la representación gráfica usando el mismo sistema de coordenadas anterior y deduce la fórmula que expresa la relación entre el volumen y el tiempo.

Tiempo (min.)	0	1	4	…	t
Volumen (lit.)					

c. Si el volumen inicial fuera de 500 litros obtén la recta que pasaría por (0,500), usa el mismo sistema de coordenadas y deduce la ecuación que expresa la relación entre el volumen y el tiempo.

d. ¿Qué fórmula corresponde a la situación gráfica siguiente?



e. Generalización ó institucionalización del saber. El profesor ayudará a los alumnos a construir su propio conocimiento haciéndoles reflexionar sobre los siguientes tópicos:

- ¿Observas alguna semejanza entre las gráficas? ¿Cuál? (las rectas tiene la misma inclinación que llamamos *pendiente*, que corresponde a la velocidad de llenado de la piscina, la misma en todas las situaciones presentadas).
- ¿Observas alguna diferencia entre las gráficas? ¿Cuál? (las rectas parten de puntos diferentes, el valor de la ordenada del punto de partida la llamamos *ordenada en el*

origen, que corresponde al volumen de agua en la piscina cuando el tiempo es 0 minutos).

- ¿Las rectas tienen algún punto en común? ¿Por qué? ¿Cómo son entre sí? (no tienen puntos en común porque son paralelas o tienen la misma inclinación o velocidad de llenado y porque el volumen inicial de agua es diferente en cada situación presentada).
- ¿Qué tienen en común las expresiones algebraicas halladas en cada uno de los casos? (el coeficiente que acompaña a la variable independiente) ¿Qué significa este elemento común en las rectas? (la velocidad de llenado de la piscina) ¿Qué nombre recibe el elemento común en cada expresión algebraica? (el valor de la pendiente).
- ¿Cuál es el punto de corte, de cada una de las gráficas, con eje de las ordenadas? (el punto de corte tiene dos coordenadas, la abcisa, representa el tiempo, 0 minutos, y la ordenada, el volumen inicial de agua en la piscina, 0, 200, 500 ó 15 litros de agua). Las 4 gráficas, ¿tienen igual punto de corte con el eje de las ordenadas? ¿Por qué? (No, porque la cantidad de agua en la piscina al comenzar a llenarla diferente).
- Tomando como punto de comparación el origen del eje de coordenadas, ¿cuál es la diferencia entre este punto y el punto de corte con el eje de las ordenadas del caso a? (0 litros) Y, ¿para los casos b, c y d? (200, 500 y 15 litros de agua).
- ¿Qué tienen de diferente las expresiones algebraicas halladas en cada uno de los casos? (El término independiente). ¿Qué relación existe entre la diferencia que encontraste en cada una de las expresiones algebraicas halladas y los puntos de cortes de las rectas con el eje de abcisas? (El término independiente corresponde a la cantidad de agua en la piscina al comenzar a llenarla, en cada una de las situaciones presentadas).
- ¿Cuál es el tiempo, en cada caso, para el cual la piscina se terminó de llenar? (El tiempo para el cual el volumen de agua llega a 5.000 litros). ¿Qué sucede si se deja el grifo abierto? (Que el agua se derrama en el piso, es decir, el volumen de agua de la piscina se mantiene en 5.000 litros).

Intenciones: Realizar cálculos para rellenar las tablas y deducir las operaciones correspondientes. Variación de la ordenada manteniendo constante la pendiente (velocidad de llenado). Obtención del gráfico y fórmula de la función afín conocida la ordenada en el origen y con pendiente constante (velocidad de llenado). Comparación de las distintas gráficas para deducir propiedades de paralelismo entre rectas. Traducción de una función afín del lenguaje verbal al tabular, al gráfico y al algebraico; comenzando por casos particulares llegar a la generalización. Hacer observar que el dominio de la variable dependiente va de 0 a 5.000. Relacionar el concepto de función afín con situaciones de la vida cotidiana. Valorar el lenguaje geométrico en la enseñanza de matemática. Afianzar una actitud de confianza en la utilidad de las matemáticas. Hacer observar que la pendiente es positiva porque a medida que aumenta la variable independiente (tiempo) también aumenta la dependiente (cantidad de agua en la piscina), lo cual se refleja en la gráfica en el ángulo agudo de la recta y del eje de abcisas.

Comentarios: Esta actividad tiene una gran riqueza de contenido, por involucrar los conceptos básicos relacionados con la función afín y por combinar los cuatro tipos de lenguaje matemático, por estos motivos es conveniente que el profesor la exponga en clase con detalle. Los datos de la parte a del ejercicio permiten representar una función afín que parte del origen de coordenadas; los datos de la parte b y c del ejercicio permiten obtener una recta cuya ordenada es distinta de cero (0). A partir de las tablas y gráficas se pueden deducir las formas algebraicas de las funciones afines correspondientes para luego generalizar la expresión algebraica de una función afín como $f(x) = m.x + b$, siendo m la pendiente y b la ordenada en el origen. Hacer observar que las gráficas son siempre rectas porque la velocidad de llenado, la pendiente, es constante. De los gráficos y de las fórmulas se deducen las propiedades de las rectas paralelas (no tienen puntos comunes, tiene la misma pendiente y distinta ordenada en el origen).

Ampliación de esta actividad: Repetir el mismo estudio para vaciar la piscina. Hacer observar que la pendiente es negativa porque a medida que aumenta la variable independiente (tiempo) disminuye la dependiente (cantidad de agua en la piscina), lo cual se refleja en la gráfica en el ángulo obtuso entre la recta y del eje de abcisas. El volumen inicial puede variarse entre 5.000 y 4.500 litros.

Fuente: Sociedad Andaluza de Profesores de Matemática, *Definición de funciones afines.* En: http:// www. juntadeandalucia.es /averroes/ iesarroyo /matematicas/ materiales /3eso / funciones/ teoriafuncionesafines/ teorifuncionesafines.htm. (Adaptado).

Actividad Nº 6: Desarrollo de nuevas ideas.

Título: A subir las maletas al carro.

Texto: El espacio muerto de un carro es la distancia entre la base del carro y el piso.

Hay una fórmula para el espacio muerto. Esta es:

$$\mathbf{e = 40 - (w : 10),}$$

donde **e** es el espacio muerto en cm y **w** es el peso del vehículo en Kg.

a. Completa la tabla:

w	**0**	**50**	**100**	**150**	**200**
e					

b. Dibuja en unos ejes los valores de **w** y **e** de la tabla. Dibuja una recta que una estos puntos.
c. Usa la gráfica para buscar **e** cuando **w** = 180 Kg.
d. ¿Cuánto vale **e** si **w** = 360 Kg?
e. ¿Cuál es le valor de **w** cuando **e** = 0 cm? ¿Qué le ocurre al carro en ese momento?
f. Cuando el espacio muerto es de 12 cm, ¿qué peso soporta el carro?

Intenciones: Traducir la función afín del lenguaje verbal y algebraico al tabular y gráfico. Reconocer e interpretar relaciones entre magnitudes susceptibles de ser tratadas como función afín en el contexto de su vida cotidiana. Hacer reflexionar, discutir, suscitar interrogantes, entablar debates. Calcular la variable dependiente en función de la independiente y viceversa. Hacer observar que la pendiente de la recta es negativa porque a medida que aumenta la variable independiente (peso del carro) disminuye la dependiente (espacio muerto del carro), lo cual se refleja en la gráfica en el ángulo obtuso entre la recta y el eje de abcisas. Hacer observar que el dominio de la variable dependiente va de 0 a 10 cm.

Comentarios: Esta actividad, como la anterior, es muy rica desde el punto de vista didáctico, debido a que involucra los conceptos básicos relacionados con la función afín y combina los cuatro tipos de lenguaje matemático. Permite hacer una traducción de la función afín expresada de forma verbal y algebraica a las representaciones tabular y gráfica. Se utiliza el entorno cotidiano del alumno para estudiar la función afín. Como el profesor expuso en clase de forma detallada la actividad anterior, esta actividad puede ser trabajada como tarea para la casa y ser discutida en la siguiente sesión de clase.

Ampliación de esta actividad: Repetir la misma actividad en sentido inverso, descargar las maletas del carro. Hacer observar que la pendiente es positiva porque a medida que aumenta la variable independiente (peso), también aumenta la dependiente (espacio muerto del carro), lo cual se refleja en la gráfica en el ángulo agudo entre la recta y del eje de abcisas.

Fuente: Sociedad Andaluza de Profesores de Matemática, *Definición de funciones afines*. En: http:// www. juntadeandalucia.es /averroes/ iesarroyo /matematicas/ materiales /3eso / funciones/ teoriafuncionesafines/ teorifuncionesafines.htm. (Adaptado).

<u>Actividad Nº 7</u>: Desarrollo de nuevas ideas.

Título: Influencia de los parámetros m y b (pendiente y ordenada en el origen)

Texto: Usando los ejemplos electrónicos NCTM 2000, Nº 5.2. y 6.2 [94], explora los conceptos y propiedades básicas de la función afín. Observa bien todo lo que vas descubriendo, toma nota y redacta un informe de tus hallazgos. Si te trancas en algún momento, pregunta a tu profesor qué más puedes descubrir.

Intenciones: Uso de la tecnología, las gráficas de funciones afín dinámicas conectadas por algún elemento o propiedad (la pendiente, la ordenada en el origen, perpendicularidad, etc.) pueden sugerir relaciones matemáticas que tal vez resulten sorprendentes al alumno, de forma que al explorar esas relaciones obtenga una comprensión más profunda de conceptos importantes. La tecnología permite manipular las representaciones rápidamente, aspecto poco fácil con papel y lápiz. El propósito de este ejercicio es que los alumnos entiendan mejor las funciones afines explorando la relación entre representaciones verbales, simbólicas y gráficas. El primer ejercicio centra la atención de los alumnos en el papel que desempeñan los parámetros en una función afín y los involucra en la observación, descripción y comparación de las relaciones entre objetos matemáticos, también facilita la conexión entre los diversos lenguajes. Explorar lo que sucede al ajustar b y m por separado. Al intentar entender por qué un par de líneas aparentemente se cortan en un punto común, los alumnos descubrirán que es útil desarrollar una representación simbólica general de la familia de líneas cuyas pendientes son iguales o las cuales tienen la misma ordenada en el origen. Comparación de las gráficas de las rectas para deducir propiedades de paralelismo y perpendicularidad entre rectas (también, paralelismo o perpendicularidad a uno de los ejes de coordenadas). Afianzar una actitud de confianza en la utilidad de las matemáticas.

Comentarios: Una de las ventajas del desarrollo del ejercicio es el uso de la tecnología. Con esta actividad se pueden hacer múltiples representaciones de la función afín variando sus parámetros. Es una actividad altamente experimental e involucra al alumno en la observación, descripción y comparación de las relaciones entre objetos matemáticos. Se puede hacer este trabajo en grupos de 2 ó 3 alumnos y pedir que redacten por escrito las observaciones realizadas para entregar en la siguiente sesión de clase.

Fuente: NCTM (2000). CD de tareas. Ejemplos electrónicos Nº 5.2. *Comprender las relaciones de distancia, velocidad y tiempo* mediante programas de simulación y Nº 6.2. *Aprender la tasa de variación* en las funciones lineales mediante gráficas interactivas. (Adaptados).

---

[94] El ejemplo Nº 5.2. presenta, en dibujos con movimiento y en una gráfica, la situación de dos jóvenes corriendo de un árbol a la casa (y viceversa), los cuales se cruzan en el camino. El ejemplo 6.2. presenta la gráfica de la función afín en la que se pueden variar los parámetros m y b, para observar cómo es afectada la recta por esos cambios.

<u>Actividad Nº 8</u>: Desarrollo de nuevas ideas.

Título: Conectando lenguajes y parámetros de la función afín.

Texto: Recordar la actividad Nº 5 y a partir de ella se seguirá la siguiente secuencia.

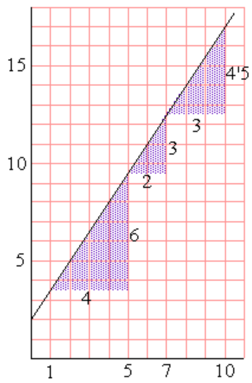
a. Con los datos de la actividad Nº 5, apartado b, calcular los incrementos de los tiempos, Δ t (variable independiente) y los incrementos de los volúmenes, Δ V (variable dependiente) de la misma manera que se hace en la tabla que aparece a continuación. Calcula el cociente de la diferencia de los incrementos de y, entre los incrementos de x. Relaciona este cociente con la fórmula de la pendiente conocidos dos puntos, $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$. ¿Qué obtienes?

Incremento de x: +4 +2 +3

x	1	5	7	10
y	3'5	9'5	12'5	17

Incremento de y: +6 +3 +4'5

b. Con la gráfica de la actividad Nº 5, apartado b, calcular los triángulos rectángulos y el valor de cada cateto, de la misma manera que se hace en la gráfica que aparece a continuación. Calcula el cociente entre el cateto en posición vertical y el cateto en posición horizontal. Relaciona este cociente con la fórmula de la pendiente conocidos dos puntos. ¿Qué obtienes? Fórmula: $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$.



c. Con el valor de la pendiente y de la odenada en el origen, calcula la expresión algebraica de la función afín y la ecuación de la recta correspondiente.

Respuesta a este apartado: $m = 5$ $b = 200$

$V = 5t + 200$ Expresión algebraica de la función afín

$5t - V + 200 = 0$ Ecuación general de la recta

d. La expresión algebraica de una función afín $y = m x + b$, se puede calcular fácilmente conociendo m y b; pero también con los siguientes datos:

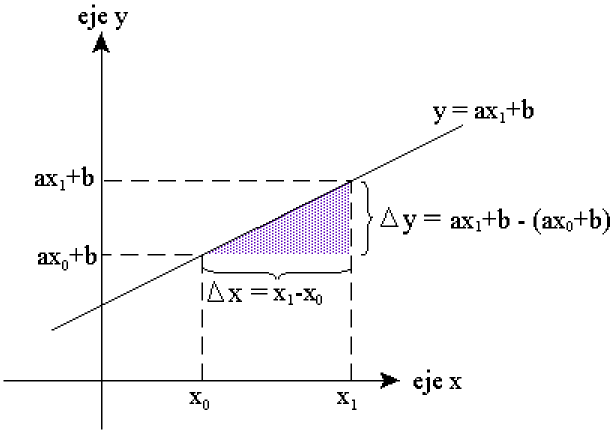
- un punto (x_1, y_1) y el valor de la pendiente, m;
- dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

Observación: No se necesita memorizar las fórmulas que aparecen en los libros para calcular ecuaciones con los datos arriba indicados.
Ecuación de la recta conocido un punto y la pendiente: $(y-y_1) = m\,(x-x_1)$
Ecuación de la recta conocidos dos puntos: $(y-y_1) = [(y_2-y_1)/(x_2-x_1)].\,(x-x_1)$

e. Recapitular cada parte de esta actividad comparando los valores de la pendiente y de la ordenada en el origen en cada uno de los lenguajes matemáticos (verbal, tabular, gráfico y algebraico).

f. Grafica una recta perpendicular en el sistema de coordenadas utilizado en el apartado b de esta actividad, dibuja un triángulo rectángulo cuya hipotenusa esté en esa recta. Compara las pendientes de las rectas y explica con tus palabras por qué es cierta la relación $m_1.m_2 = 1$.

Nota: Comparar las proporciones entre los catetos de un triángulo que esté sobre la primera recta y sobre la segunda (la perpendicular a la anterior). Abajo aparece un dibujo de referencia para el profesor.



Intenciones: La explicación del profesor servirá para llevar a los alumnos a conocer la pendiente y la ordenada en el origen en cualquier lenguaje, y enseñar a traducir de forma flexible esos conceptos básicos en los diversos lenguajes. Se relacionarán esas conexiones con las fórmulas algebraicas para calcular la pendiente de una recta, la ecuación de la recta conocidos dos puntos, la ecuación de una recta conocido un punto y la pendiente (fórmulas presentes en los diversos libros de texto, que no es necesario aprender de memoria). Exponer la forma de conectar los valores de pendientes de rectas perpendiculares entre sí y de rectas paralelas. Hacer observar la inclinación de la recta y su ángulo con respecto al eje de las abcisas para diferenciar una función afín creciente de una decreciente.

Comentarios: Esta actividad promueve capacidades matemáticas potentes en el alumno como son el razonamiento, la visualización, etc. Se apoya en conocimientos geométricos al estudiar los triángulos rectángulos cuya hipotenusa es un segmento de una recta (los catetos corresponden a incrementos de las variables dependiente e independiente, respectivamente)

Fuente: Elaboración propia.

Actividad Nº 9: Desarrollo de nuevas ideas.

Título: Practica y explica.

Texto: Resuelve el siguiente ejercicio en tu cuaderno mientras el profesor lo va haciendo contigo en la pizarra.
a. Calcula la expresión algebraica (fórmula) de la recta que pasa por el punto P (3, 4) y es perpendicular a $g(x) = -3/2\ x$
b. Explica con tus palabras cómo resolviste el ejercicio anterior.

Respuesta:

a. Sea $f(x) = m_f\, x + b_f$ con $m_g \,.\, m_f = -1$, $(-3/2)\,.\,m_f = -1$
$m_f = 2/3$, es decir, $f(x) = (2/3)\,.\,x + b_f$
P (3, 4) pertenece a esta recta, por lo tanto, se sustituyen los valores en f(x), es decir, $4 = (2/3)\,.\,3 + b_f$, despejo $b_f = 2$.
La recta pedida es $f(x) = (2/3)\,.\,x + 2$

b. Paso 1. Se lee bien el ejercicio hasta comprenderlo.
Paso 2. Se calcula la pendiente de la recta perpendicular, f(x), a partir de la pendiente de la recta dada, g(x).
Paso 3. En la expresión algebraica de la función perpendicular, $f(x) = m_f\, x + b_f$, se sustituye el valor de la pendiente.
Paso 4. Como el punto P pertenece a la recta f(x), se sustituyen los valores de sus coordenadas en la fórmula y se obtiene el valor de la ordenada en el origen, b_f.
Paso 5. Se sustituye este valor en la fórmula, obteniendo así las expresión algebraica pedida, $f(x) = (2/3)\,.\,x + 2$

Intenciones: Practicar procedimientos. Promover el estándar de comunicación que recomienda NCTM 2000 para todas las etapas.

Comentarios: Este ejercicio puede explicarlo el profesor para todo el grupo y así facilitar el trabajo de los alumnos de la siguiente actividad.

Fuente: Elaboración propia.

<u>Actividad Nº 10</u>: Actividades de consolidación y ajuste de ritmos.

Título: Apliquemos lo aprendido.

Texto: Realiza los siguientes ejercicios sobre función afín.

a. Representa gráficamente las funciones:

a.1. $f: x \rightarrow 3x - 5$ a.2. $f(x) = 2x + 3$ a.3. $f: x \rightarrow x$

a.4. $f: x \rightarrow -x$ a.5. $f: x \rightarrow 3$ a.6. $f: x \rightarrow 2x - \frac{5}{3}$

Observación: El profesor ha de explicar o recordar la equivalencia de la notación $y = f(x)$ con la de los apartados de este ejercicio.

b. Indica el valor de la pendiente y de la ordenada en el origen de las siguientes funciones afines:

- b.1. $f(x) = 2 – 3x$
- b.2. $g(x) = 2 (3x – 4)$
- b.3. $h(x) = 3/5 (x – 1)$

c. ¿Pertenece el punto A(3,4) a la gráfica de la función $\mathbf{f(x) = x + 1}$?
¿Y B(-5,-4)?; ¿Y C(-1,1)?.
Observación: Este ejercicio puede resolverse de manera gráfica o algebraica.

d. Sean los puntos A(-1,-1), B(2,2) y C(-1,2). Determina en forma gráfica y algebraica la función afín cuya representación gráfica pasa por A y B. ¿Pertenece C a esta representación?

e. Sea una función afín definida por $\mathbf{f(x) = ax + b}$. Calcula **a**, **b** y obtén la expresión de **f(x)** en cada uno de los siguientes ejercicios**;** se conocen dos puntos por los que pasa la recta:

e.1. $f(2) = 3$ y $f(1) = 2$

e.2. $f(3) = 4$ y $f(-1) = 2$

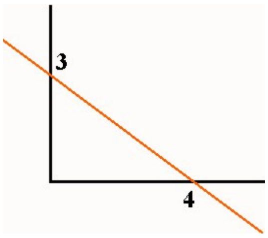
e.3. $f(1) = 11/6$ y $f(2) = 10/3$

Observación: El profesor ha de explicar el significado de la notación $f(2) = 3$; y en general, de $y = f(x)$.

f. Obtén una función afín que sea paralela a $\mathbf{g(x) = 3x}$ y pase por el punto **A(2/3,1)**.

g. Obtén una función afín que sea perpendicular a $\mathbf{g(x) = – 3x + 2}$ y pase por el punto **A(2/3,1)**.

h. La gráfica siguiente representa una función afín.



De estas 4 fórmulas, ¿cuál es la que la define?

f(x) = 5x; **f(x) = –3x + 4**; **f(x) = 3/4 x + 3**; **f(x) = – 3/4x + 3**.

Intenciones: Afianzar los conocimientos sobre la función afín. Pertenencia o no, de puntos a una recta. Relaciones entre rectas paralelas y perpendiculares. Conexión entre las diversas formas de representación de la función afín. Conectar con la actividad Nº 8 de forma que los alumnos perciban que no siempre el mejor procedimiento para llegar a la solución es la aplicación de las fórmulas que traen los libros; hacerles ver la importancia de que las fórmulas tengan sentido conceptual al estudiarlas.

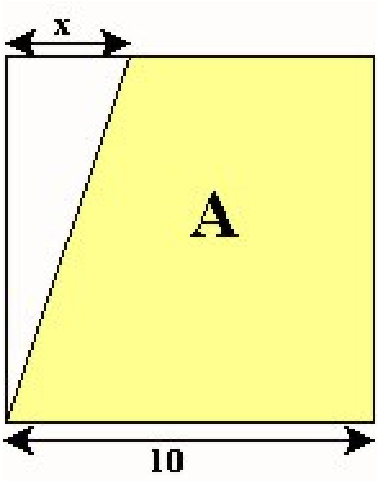
Comentarios: Se pueden realizar los ejercicios de manera individual o en grupos pequeños y propiciar una discusión sobre los procedimientos usados en la resolución de las actividades propuestas. También puede ser una tarea para la casa que se corrija en la siguiente sesión de clase.

Fuente: Sociedad Andaluza de Profesores de Matemática, *Problemas sobre la función afín.* En: http:// www. juntadeandalucia.es /averroes/ iesarroyo /matematicas/ materiales /3eso / funciones/ teoriafuncionesafines/ teorifuncionesafines.htm. (Adaptado).

Actividad Nº 11: Actividades de consolidación y ajuste de ritmos.

Título: ¿Cuál es el área del aula?

Texto: Un aula cuadrada se construyó con la posibilidad de ampliarla o disminuirla según el número de personas que participen en una determinada actividad. Obtén el área sombreada en función de x. ¿Podrías indicar cuál es el intervalo de valores posibles para la variable independiente? ¿Y para la variable dependiente? ¿Por qué no pueden tomar cualquier valor?



Intenciones: Resolución de un problema cerrado. Desarrollar la capacidad de visualización geométrica. Conexión flexible entre diversos lenguajes matemáticos. Relación con los problemas cotidianos. Relación con el área de geometría (medida de un lado, áreas del cuadrado y del triángulo).

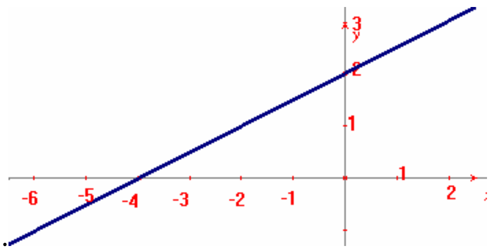
Comentarios: Flexibilidad en las conexiones entre los diversos conceptos matemáticos: la variación del área de una figura y su expresión algebraica como una función afín. Se trata de un problema cerrado, de nivel medio de dificultad. Puede ser realizado en clase por el profesor para dar pistas sobre problemas cotidianos de este estilo.

Fuente: Sociedad Andaluza de Profesores de Matemática, *Problemas sobre la función afín.*. En: http:// www. juntadeandalucia.es /averroes/ iesarroyo /matematicas/ materiales /3eso / funciones/ teoriafuncionesafines/ teorifuncionesafines.htm. (Adaptada).

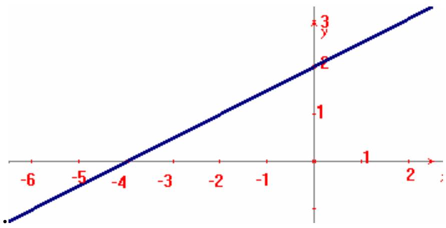
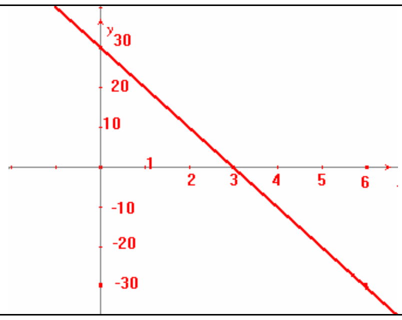
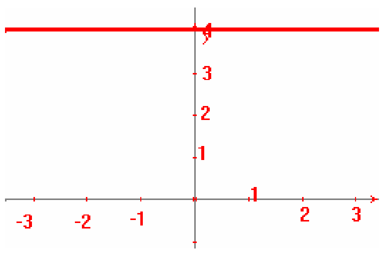
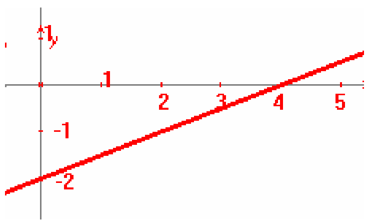
Actividad Nº 12: Actividades de consolidación y ajuste de ritmos.

Título: Completa el cuadro.

Texto: En cada fila de este cuadro aparece una forma de representar una función afín, a partir de ella has de ser capaz de colocar en los espacios en blanco de la misma fila las respuestas correctas (la misma función en la representación que se indica). Puedes realizar operaciones, dibujos, etc. en otra hoja.

<table>
<tr><th>GRAFICA</th><th>TABLA</th><th>FORMULA</th></tr>
<tr><td>
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td><table><tr><td>t</td><td>0</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>e</td><td>30</td><td>0</td><td>-30</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>y = 4</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>f(x) = ½ x - 2</td></tr>
</table>

Respuesta: Tabla completada.

<table>
<tr><th>GRAFICA</th><th>TABLA</th><th>FORMULA</th></tr>
<tr>
<td></td>
<td><table><tr><td>x</td><td>0</td><td>-2</td><td>-4</td></tr><tr><td>y</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td></tr></table></td>
<td>$y = \frac{1}{2} . x + 2$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td><table><tr><td>t</td><td>0</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>e</td><td>30</td><td>0</td><td>-30</td></tr></table></td>
<td>$e = -10\,t + 30$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td><table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>y</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr></table></td>
<td>$y = 4$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td><table><tr><td>x</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>F(x)</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td></tr></table></td>
<td>$f(x) = \frac{1}{2}\ x - 2$</td>
</tr>
</table>

Intenciones: Desarrollar la capacidad de visualización geométrica. Conexión flexible entre diversos lenguajes matemáticos. Revisar el grado de asimilación de los conceptos de pendiente y ordenada en el origen en tres de los lenguajes matemáticos (gráfico, tabular y algebraico).

Comentarios: Flexibilidad en la conexión de los diversos conceptos básicos sobre la función afín en sus diferentes lenguajes. Puede ser propuesto como tarea para la casa ya que la actividad Nº 8 brindó a los alumnos suficientes herramientas para razonar sobre este tipo de ejercicios.

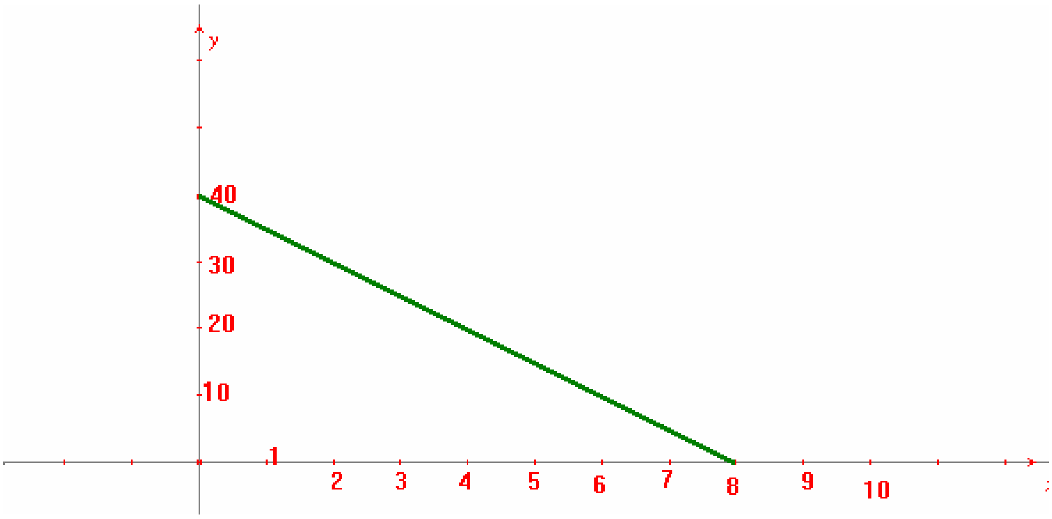
Fuente: Elaboración propia.

Actividad Nº 13: Actividades de consolidación y ajuste de ritmos.

Título: Intenta ser un profesor creativo.

Texto: Intenta ser profesor de matemáticas, con la siguiente tarea.

a. Inventa el enunciado de un problema que corresponda a la representación gráfica que aparece abajo.
b. Resuelve el problema que has inventado.
c. Explica las razones por las que piensas que tu enunciado corresponde a esa gráfica.



Respuesta posible:

a. Un corredor sale de la Universidad Simón Bolívar hacia su casa, que está a una distancia de 40 Km (Catia, Caracas). La velocidad del corredor es constante de 5 Km /h.
(1) Determina la expresión algebraica que representa a esta situación.
(2) Con la fórmula calculada, haz una tabla de valores y haz la gráfica de la situación
(3) Después de 2 horas de su salida ¿Cuántos Km le faltan para llegar a su casa? ¿Y después de 6 horas?
(4) Cuando ha recorrido la mitad del camino ¿cuántas horas lleva corriendo?

b.
(1) $d(t) = -5 . t + 40$

(2) t en horas, d(t) en Km

t	0	4	8
d(t)	40	20	0

La gráfica es la misma del enunciado del problema, añadiendo que en el eje de las abcisas se representa el tiempo y en el de las ordenadas la distancia.

(3) d(2) = 30 Km y d(6) = 10 Km

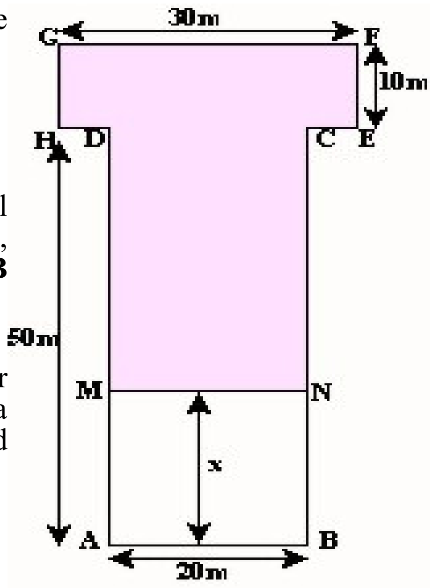
(4) d(t) = 20 Km es la mitad del camino, 20 = – 5 . t + 40, es decir, t = 4 h.

c. Porque el problema inventado se puede representar con una función afín decreciente cuya pendiente es – 5 Km / h y cuya ordenada en el origen es 40 Km. Y, estas son las características de la gráfica inicial de la cual había que inventar el problema. El eje de las abcisas corresponde al tiempo desde que se sale del punto de partida y el eje de las ordenadas corresponde a los Km que faltan para llegar a la casa.

Intenciones: Resolución de un problema abierto de alto nivel de dificultad. Desarrollar la creatividad, el razonamiento y promover la capacidad de comunicación. Conexión flexible con los problemas cotidianos en los que la variable independiente se relacione con la dependiente de forma directamente proporcional y decreciente. Evaluar el grado de sentido que tienen los conceptos básicos de función afín para los alumnos.

Comentarios: Flexibilidad en las conexiones de conceptos básicos sobre función afín y diversos problemas cotidianos. Conviene que sea parte de una tarea individual de los alumnos, que sea corregida y comentada por el profesor.

Fuente: Elaboración propia.



Actividad Nº 14: Actividades de consolidación y ajuste de ritmos.

Título: Sala de fiesta.

Texto: Una sala de fiestas tiene la forma indicada en el dibujo. Una pared móvil representada por el segmento **MN**, permite reducir la superficie de la sala. Las rectas **MN** y **AB** son paralelas.

1) A fin de decorar las paredes de la sala, el organizador desea conocer el perímetro del polígono **MNCEFGHD.** La unidad de longitud es un metro. Llamamos **x** a la longitud **AM** (con y por f(x) al perímetro de la sala).

$$0 \leq x \leq 50$$

a. Calcula f(0) y f(50).

b. Obtén **f(x)** en función de **x** y comprueba que es una función afín.

c. Calcula el valor del perímetro **f(x)** cuando **M** está en la mitad del segmento **AD**.

2) **Refrigeración de la sala**. El organizador desea conocer el volumen de la sala, para refrigerarla mejor. El techo está a una altura de 3 metros. Notamos **g(x)** al volumen de la sala en m^3.

a. Obtén **g(x)** en función de **x** y comprueba que es una función afín.

b. Dibuja en unos ejes de coordenadas la función **g** (la escala será: 1cm por cada 5 metros en el eje de las abscisas y 1 cm por cada 500 m^3 en el de las ordenadas).

c. El organizador decide alquilar material de refrigeración suplementario cuando el volumen de la sala sea superior a 3000 m^3. Utilizando la gráfica anterior, encuentra los valores de **x** para los que el material de refrigeración suplementario será necesario.

Intenciones: Reconocer e interpretar relaciones entre las unidades de longitud, perímetro, volumen de figuras del plano y del espacio en el contexto de la vida cotidiana. Captar la riqueza de la función afín para optimizar tiempo y dinero en situaciones corrientes. Hacer reflexionar, discutir, suscitar interrogantes, entablar debates. Relacionar la función afín con conceptos geométricos. Afianzar una actitud de confianza en la utilidad de las matemáticas.

Comentarios: Se analiza como se puede reflejar la función afín en problemas reales y permite relacionar el contenido de función afín con la geometría. Trabajar la actividad en grupos pequeños y al final de la sesión el profesor puede dirigir la puesta en común de los hallazgos de los grupos.

Fuente: Sociedad Andaluza de Profesores de Matemática, *Problemas sobre la función afín.* En: http:// www. juntadeandalucia.es /averroes/ iesarroyo /matematicas/ materiales /3eso / funciones/ teoriafuncionesafines/ teorifuncionesafines.htm. (Adaptado).

<u>Actividad Nº 15</u>: Actividades de consolidación y ajuste de ritmos

Título: Aquiles y la tortuga.

Texto: El griego **Zenón de Elea** pensaba que el formidable guerrero **Aquiles** no podría jamás atrapar a una tortuga que estuviera a una cierta distancia de él. Zenón lo justificaba así, supongamos que la tortuga se encuentra a 900 metros de Aquiles y recorre 20 metros por minuto, mientras que Aquiles recorre 300 metros por minuto.

- Cuando Aquiles haya avanzado 900 metros, la tortuga habrá avanzado 60 metros, y ¡no la alcanza!. Cuando él haya avanzado 60 metros, ella habrá recorrido 4 metros, y ¡no la alcanza!
- Cuando él haya avanzado 4 metros, ella habrá recorrido 27 cm., y ¡no la alcanza!. Cuando él avance 27 cm., ella habrá recorrido 1'8 cm., y ¡no la alcanza!. Y así sucesivamente.

Puesto que cuando Aquiles avanza, la tortuga también avanza, Zenón concluyó que: ¡Aquiles jamás atrapará a la tortuga! ¿Qué piensas?

a. Con la ayuda de funciones afines vamos a terminar con esta paradoja. Halla las expresiones algebraicas que representan la distancia recorrida por la tortuga y la recorrida por Aquiles.

b. Usando el mismo sistema de coordenadas, realiza las representaciones gráficas de la distancia recorrida por la tortuga y Aquiles. ¿Tienen algún punto de intersección las rectas graficadas? ¿Qué te sugiere esta situación gráfica?

c. Como sabes, es imposible que Aquiles no atrape a la tortuga, entonces, ¿a qué distancia y al cabo de cuánto tiempo Aquiles atrapará a la tortuga? ¿Cómo obtuviste esa solución?

d. ¿Cuando la atrape, la distancia a la que está la tortuga del punto de partida será la misma que la distancia de Aquiles al punto de partida?

d. ¿Podríamos llegar a la solución algebraicamente?

Intenciones: Despertar la curiosidad con el planteamiento de un problema histórico que desarrolla una lógica que no es válida en la realidad. Reconocer e interpretar relaciones entre magnitudes susceptibles de ser tratadas como función afín en el contexto de la historia de la matemática. Hacer reflexionar, discutir, suscitar interrogantes, entablar debates. Afianzar el concepto de rectas secantes. Realizar la traducción entre los diversos lenguajes matemáticos. Conexión con la unidad didáctica posterior, sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y sus métodos de resolución (el gráfico y los algebraicos).

Comentarios: Esta actividad puede motivar a los alumnos porque se propone la solución de una paradoja muy antigua. En este problema es necesario utilizar la representación gráfica para determinar la solución.

Fuente: Sociedad Andaluza de Profesores de Matemática, *Problemas sobre la función afín.* En: http:// www. juntadeandalucia.es /averroes/ iesarroyo /matematicas/ materiales /3eso / funciones/ teoriafuncionesafines/ teorifuncionesafines.htm. (Adaptado).

Evaluación del aprendizaje de los alumnos

<u>Evaluación diagnóstica:</u> Actividad Nº 1, en la que se trata de determinar los conocimientos previos de los alumnos respecto a la función afín.

<u>Evaluación continua:</u> A través de las actividades realizadas por los alumnos como tarea para la casa y con las que hayan hecho en el aula. Todas las actividades deben ser evaluadas por el docente de una u otra forma, y siempre, observando el grado de participación activa en las tareas y la actitud de cada alumno en la construcción de su propio aprendizaje.

Intenciones: Observar el proceso de asimilación del estudiante sobre los nuevos conocimientos adquiridos. Motivar el proceso de aprendizaje.

Comentarios: El profesor puede elaborar una guía de ejercicios y problemas que contenga las actividades a realizarse como tarea que se entregará el día que comienza a dictarse la Unidad Didáctica.

Fuente: Se indica en cada actividad.

<u>Evaluación final:</u> Prueba individual (cfr. ANEXO), evaluada sobre 20 puntos. Tiempo estimado 1 hora y 30 minutos. Esta prueba presenta contenidos de diversos niveles de dificultad (bajo, medio y alto) y de diversos tipos de tareas (conceptos, estructuras; algoritmos, técnicas instrumentales; resolución de problemas; lenguaje y visualización; y, por último, razonamiento y demostración) [95]. Con ella se pretende medir el grado de asimilación de los objetivos propuestos utilizando la rejilla como el instrumento de evaluación (cfr. CUADRO).

Intenciones: Medir el grado de asimilación de los nuevos conocimientos adquiridos

Comentarios: En la tabla se indica a qué nivel y tarea corresponde cada pregunta de la prueba.

CUADRO

[95] Cfr. RICO, Luis (1997). *La educación matemática en la educación secundaria*, p. 207-215.

NIVEL	TIPO	PREGUNTAS
Bajo		
	A. Conceptos. Estructuras	1.a, b, c, d
	B. Algoritmos. Técnicas instrumentales	2.a
	C. Resolución de problemas	2.a
	D. Lenguaje y visualización	2.b
	E. Razonamiento y demostración	2.b
Medio		
	A. Conceptos. Estructuras	2.c 3 4. b
	B. Algoritmos. Técnicas instrumentales	2.d 3.a, b
	C. Resolución de problemas	2.d 4
	D. Lenguaje y visualización	2.e 3. c, d 4. b, c
	E. Razonamiento y demostración	2.c 4
Alto		
	A. Conceptos. Estructuras	5.a
	B. Algoritmos. Técnicas instrumentales	5.b
	C. Resolución de problemas	5.a .b
	D. Lenguaje y visualización	5.a
	E. Razonamiento y demostración	5.c

Fuente: Elaboración propia.

PRUEBA SOBRE FUNCIÓN AFÍN

1. Completa los espacios en blanco con la palabra correcta:
Valor: 0,5 cada espacio. Total: 3 puntos

a) La pendiente de una función afín es la _______________ de la recta.
b) La segunda coordenada del punto de intersección de una recta con el eje vertical de coordenadas se llama _________________________
c) Las rectas con igual pendiente son _______________
d) Las rectas $y = -5x + 7$; $y = x\ \ 1/5$ son _____________ (paralelas o perpendiculares).
e) Una recta es decreciente cuando su pendiente es _______________ y es creciente cuando es _______________ (positiva o negativa).

2. Resuelve los siguientes ejercicios en el espacio en blanco:
Valor: 1 punto cada ejercicio. Total: 5 puntos

a) Sea $f(x) = -9x + 3$. ¿Cuál es la expresión algebraica (fórmula) de la recta paralela a f(x) y que pasa por el origen de coordenadas ó punto (0,0).

b) Si la pendiente de una recta es 1 (m = 1) y la ordenada en el origen es 3 (b = 3). Elabora la gráfica de la recta.

c) Sean los puntos A (-1, -1), B (2, 2) y C (-1 , 2). Determina la función afín que pasa por los puntos A y B. ¿Pertenece C a esa recta? Explica la respuesta

d) Calcula la expresión algebraica (fórmula) de la recta que pasa por el punto P (3, 4) y es perpendicular a $g(x) = -3/2\ x$

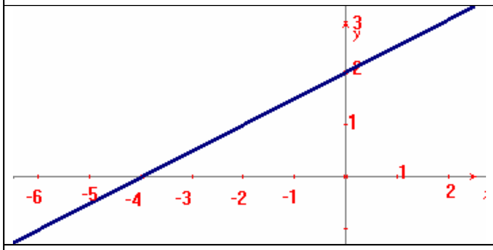
e) Explica con tus palabras cómo resolviste el ejercicio anterior

3. Completa el siguiente cuadro

Valor: 0,5 cada espacio. Total: 4 puntos

La función afín puede representarse de diversas maneras. En el cuadro siguiente se tiene <u>una de las representaciones</u> (gráfica, tabla y fórmula) de cuatro funciones afines. Completar los espacios en blanco con la correspondiente representación de la misma función afín.

Puedes realizar operaciones en la parte final de esta página.

<table>
<tr><th>GRAFICA</th><th>TABLA</th><th>FORMULA</th></tr>
<tr><td>
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td><table><tr><td>t</td><td>0</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>e</td><td>30</td><td>0</td><td>-30</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$y = 4$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$f(x) = \frac{1}{2}x - 2$</td></tr>
</table>

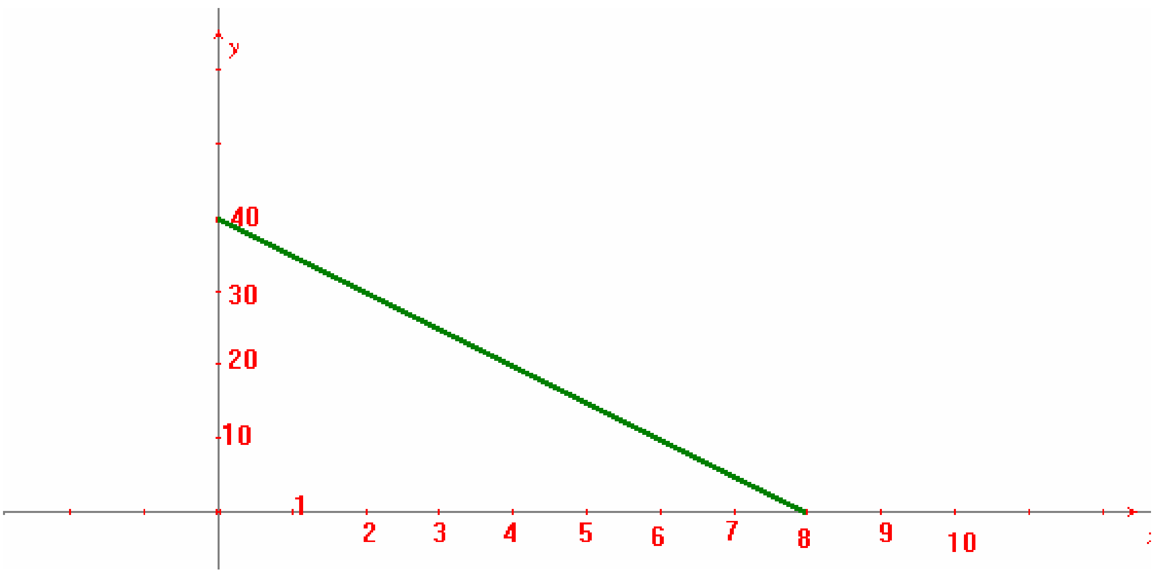
4. Resuelve el siguiente problema.
Valor: 3 puntos

Para ir de Caracas a Valencia (270 Km) elegimos como transporte un autobús que viaja a la misma velocidad durante todo el trayecto (90 Km/h). Sea d(t) la distancia en Km que nos separa de Caracas en el instante t de nuestro viaje (t se mide en horas). Si se sabe que d(t) es una función afín con d(0) = 0 Km y d(3) = 270 Km.

a) Representa gráficamente la función d (t)
b) Determina los números m y b tales que, d (t) = m t + b
c) Usa la gráfica para calcular la distancia de Caracas pasadas las dos primeras horas de viaje.
d) Utiliza la fórmula para calcula la distancia de Caracas después de transcurrida una hora de viaje

5. Redacta y resuelve un problema.
Valor: 5 puntos
Intenta ser profesor de matemáticas, con la siguiente tarea:

a) Inventa el enunciado de un problema que corresponda a la representación gráfica que aparece abajo.
b) Resuelve el problema que has inventado.
c) Explica las razones por las que piensas que tu enunciado corresponde a esa gráfica.



Algunas soluciones a las preguntas de la prueba:

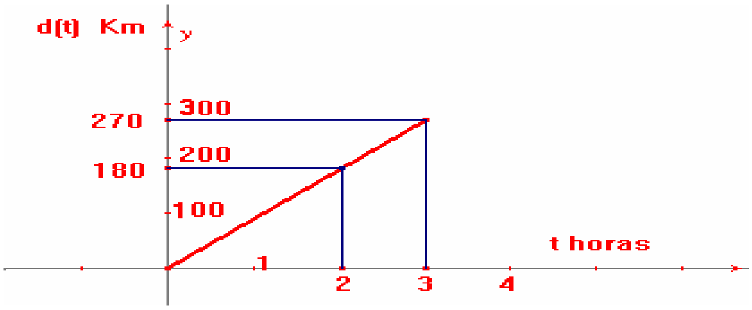
Pregunta Nº 1. f, g: Cfr. Actividad Nº 8.

Pregunta Nº 2: Cfr. Actividad Nº 12.

Pregunta Nº 4.

a.

t	0	3	
d(t)	0	270	



b. d (t) = m t + b, como m = 90 Km/h b = 0 Km, entonces d (t) = 90 . t + 0

c. d(2) = 180 Km

d. d(t) = 90 . 1 + 0 = 90 Km

Pregunta Nº 5: Cfr. Actividad Nº 13.

Bibliografía

CALLEJO, María Luz (1992). Orientaciones para la Elaboración de Unidades Didácticas. Área de Matemáticas, Monografías nº 13. Documentos I.E.P.S.

GIMÉNEZ, Joaquín (2005, Enero-febrero). Apuntes tomados y guías entregadas al dictar el curso de *Evaluación en Matemática* de la Especialización en Didáctica de la Matemática en Secundaria, USB, Caracas, Venezuela.

MARÍN, Margarita (2004, Noviembre). Apuntes tomados y guías entregadas al dictar el curso de *Currículo en Matemática* de la Especialización en Didáctica de la Matemática en Secundaria, USB, Caracas, Venezuela.

NCTM (2000), *Principios y Estándares para la Educación Matemática,* Primera edición en castellano traducida por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

RICO, Luis (Coord.) (1997). *La Educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona, Editorial Horsori.

RUÍZ HIGUERAS, Luisa, (2004, Febrero). Apuntes tomados y guías entregadas al dictar el curso de *Didáctica de las Matemáticas* y *Epistemología matemática I* de la Especialización en Didáctica de la Matemática en Secundaria, USB, Caracas, Venezuela.

Sociedad Andaluza de Profesores de Matemática, *Definición de funciones afines*. [En línea], [fecha de consulta: 12 diciembre 2004]. Disponible en: http:// www. juntadeandalucia.es / averroes / iesarroyo / matematicas / materiales / 3eso / funciones / teoriafuncionesafines / teorifuncionesafines. htm.

Sociedad Andaluza de Profesores de Matemática, *Problemas sobre la función afín*. [En línea], [fecha de consulta: 12 diciembre 2004]. Disponible en: http:// www. juntadeandalucia.es / averroes / iesarroyo / matematicas / materiales / 3eso / funciones / teoriafuncionesafines / teorifuncionesafines. htm.

Universidad Abierta de Cataluña, *Test Autoevaluaciò Funció afí.* [En línea], [fecha de consulta: 14 Febrero 2005]. Disponible en http: // www. edu365. com /aulanet / intermates / 30/ webs /autoevaluacio / test. htm.

UCAB, Material de Apoyo (sin fecha), de los *Talleres de Capacitación docente de la Universidad Católica Andrés Bello.*

ANEXO 2

EL OBJETIVO DE LA FUNCIÓN AFÍN EN EL PROGRAMA OFICIAL

OBJETIVO GENERAL

-Estudiar funciones reales.-

OBJETIVO ESPECIFICO	CONTENIDO
17. Analizar las características de la función Afín.-	FUNCION AFIN

ESTRATEGIAS DE EVALUACION SUGERIDAS

Este objetivo se considerará logrado cuando el alumno:
- -Entre varias funciones dadas identifique funciones afines.
- -Reconozca entre varias funciones afines cual corresponde a la recta de mayor pendiente.
- -Resuelva problemas en los cuales se aplique el concepto de función Afín.

ESTRATEGIAS METODOLOGICAS SUGERIDAS

PROCESO A SEGUIR:

a) Identificar la función Afín. Informe a los alumnos que las funciones de la forma: $f(x) = a.x+b$ (a y b números reales) cuya gráfica representa una recta recibe el nombre de función Afín.

, Calcular la pendiente de una recta. Proponga ejercicios en los cuales los alumnos reconozcan la pendiente de una recta.

EJEMPLOS: $3y+5x = 2$; $\frac{1}{2}y = x$; $3x = 2y$

Señalen entre varias rectas cuál tiene más inclinación.

Infórmeles que las ecuaciones que aparecen en cada uno de los ejemplos anteriores se pueden escribir como:

$5x + 3y - 2 = 0$; $x - \frac{1}{2}y = 0$; $3x - 2y = 0$

Si llamamos:

A al coeficiente de "x"
B al coeficiente de "y"
C al término independiente

Queda entonces:

$$\boxed{Ax+By+C = 0}$$

Esta expresión se denomina "Ecuación general de una recta", porque la representación gráfica de los pares (x,y) que satisfacen dicha ecuación es una recta. Esto es igual que escribir $y = ax+b$, que es la expresión de la función Afín.

Informéles que la inclinación de la recta viene dado por el ángulo que la misma forma con el eje de las abscisas, hágales observar que esa inclinación depende del número a llamado pendiente de la recta.

Haga observar a sus alumnos que si dos rectas son paralelas ellas tienen la misma pendiente.-

c) Resolver ejercicios y problemas en donde esté presente el concepto de función Afín.

.Dada una gráfica los alumnos escriban la función a la cual corresponda y viceversa.

.Dadas las coordenadas de dos puntos escribir la función Afín a la cual pertenecen.

.Representar rectas paralelas al eje **x**, al eje **y**, y paralelas entre sí.

.Proponga ejercicios en los cuales las rectas resultan perpendiculares, pida a los alumnos establezcan diferencias entre sus pendientes.

.Dado un punto de una recta y su péndiente, calcular su ecuación.

ANEXO 3

CUESTIONARIO PARA LA EVALUACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Parte I. Datos relacionados con la aplicación o experimentación de la Unidad Didáctica

Nombre del profesor/a:

Títulos profesionales:

Años de experiencia docente en el área:

Nombre de la Unidad Educativa:

Localización:

Curso al que se aplicó:

Nº de horas de clase utilizadas:

Nº de alumnos:

Otros datos de interés:

Parte II. Evaluación de la Unidad Didáctica (experimentada o aplicada) por parte del profesorado

1. ¿Han sido **evaluados** todos los objetivos de aprendizaje de los alumnos propuestos en la Unidad Didáctica al nivel que se deseaba? (Con el instrumento de evaluación propuesto por cada docente). Anexar los instrumentos propios utilizados en la evaluación del aprendizaje de los alumnos.

2. ¿Qué **objetivos** han alcanzado los alumnos y a qué nivel?

3. La forma de presentar los **contenidos**, ¿ha sido adecuada en relación con los siguientes elementos: el nivel de maduración de los alumnos; su contexto social, económico y cultural; sus intereses y motivaciones?

4. La naturaleza del **material** utilizado (material impreso, recursos audiovisuales, etc.) ¿ha facilitado la comprensión de los contenidos de la Unidad Didáctica?

5. La **redacción** y la **formulación** de las actividades, ¿han facilitado la comprensión de los alumnos?

6. Las **actividades introductorias**, ¿han sido adecuadas y suficientes para el fin que se perseguía (motivar, repasar, situar el tema, etc.)?

7. Las **actividades de aplicación**, ¿han sido suficientes para facilitar la adquisición de conocimientos?

8. Las **actividades de recapitulación** (consolidación o ajuste de ritmos), ¿han permitido sintetizar los contenidos presentados en la Unidad Didáctica y tener una idea global de los mismos?

9. El **tiempo** invertido, ¿ha sido suficiente para alcanzar los objetivos deseados?

10. La **organización de la clase**, ¿ha sido adecuada a las estrategias didácticas previstas (exposiciones, trabajos en grupo, puesta en común, debate, etc.)?

11. Las estrategias seleccionadas, los recursos empleados, el enfoque de la Unidad Didáctica, etc. ¿han sido acordes con el estilo de **profesor** y su preparación científica?

Parte III: Evaluación de la Unidad Didáctica como recurso para ser utilizado por el profesorado

Visión global

1. La **tipografía**, las **ilustraciones**, las **notaciones** y la **presentación**, ¿están cuidadas? ¿son adecuadas a la edad de los alumnos?

2. ¿Hay un **índice** suficientemente detallado que dé una idea de su contenido?

3. ¿Hay referencias a los **programas oficiales**? ¿Son claras estas referencias?

4. ¿Hay una **guía para el profesor** que explicite, entre otros, los siguientes aspectos sobre su utilización? Aspectos: modelo de enseñanza, modo de intervención del profesor, estrategias didácticas, agrupamiento de los alumnos, tipos y modos de evaluación de los aprendizajes, temporalización, recursos necesarios.

5. ¿Hay referencias a la **programación** de cursos anteriores así como a la del propio curso? (respecto al modo de impartir el mismo tema en años anteriores o por otros profesores).

6. ¿Hay **referencias bibliográficas** para la ampliación o profundización científica o didáctica en el tema?

Actividades introductorias

1. ¿Hay **actividades preparatorias** para la introducción de los contenidos de la Unidad Didáctica?

2. ¿Qué **estrategias didácticas** se utilizan en estas actividades? ¿Son **pertinentes**?

3. ¿Cuál es su **finalidad**?: motivar el tema, repasar, situar el tema en relación a otros ya trabajados, poner de manifiesto las ideas y habilidades de los alumnos sobre los aspectos que van a ser trabajados, suscitar interrogantes, hacer una aproximación histórica al tema, otras.

Actividades de presentación de los contenidos

1. La **importancia** relativa de los diferentes conceptos y procedimientos, ¿está puesta de relieve (recuadros, color, tipografía, etc.)?

2. Los **razonamientos matemáticos** aparecen: en el material del alumno (en totalidad o en parte), en otro lugar (en totalidad o en parte).

3. ¿Hay **ejercicios de aplicación** inmediata del contenido matemático?

4. La **presentación de los contenidos** se hace: a partir de un conjunto de actividades específicas del alumno, a partir de un conjunto de informaciones, combinando ambos elementos.

Actividades de aplicación de los contenidos

1. ¿Hay **rúbricas** separadas (resolución de problemas, ejercicios, investigaciones, comentarios de texto, experimentaciones, etc.)?

2. ¿Hay **clasificación** de actividades?: según la noción que hay que aplicar; según la dificultad.

3. ¿Hay varios **tipos** de estrategias didácticas (ejercicios, problemas, investigaciones, comentarios de texto, experimentaciones, etc.)?

4. ¿El **contexto de presentación** de las actividades es suficientemente variado (aspectos de la vida cotidiana, aplicación a otras disciplinas, historia de las matemáticas, situaciones lúdicas)?

5. ¿Las actividades son **motivadoras** para los alumnos a los que van dirigidas?

6. ¿Hay intención de proporcionar a los alumnos **ideas** potentes en matemáticas, **esquemas** eficaces, modos de **razonamiento**, **métodos** de investigación o de resolución de problemas, mediante ejemplos, investigaciones dirigidas, etc.?

7. En relación al trabajo personal, ¿la Unidad Didáctica permite al alumno **controlar** sus conocimientos?: memorización, comprensión, aplicación de automatismos, desarrollo de destrezas. ¿De qué forma?: autocontrol (respuesta sin explicación), autoevaluación (respuesta con explicación)

8. ¿Hay actividades de **recuperación**?

9. ¿Hay actividades de **ampliación**?

Actividades de recapitulación

1. ¿Hay **actividades síntesis** que requieren la aplicación de diversas nociones o métodos para su resolución?

2. ¿Hay **problemas abiertos** (problemas complejos para cuya resolución no se dispone de una guía-lista de cuestiones y se necesita determinar los límites dentro de los cuales la solución es válida)?

3. ¿Hay actividades que requieren conocimientos desarrollados en **otras unidades didácticas**?

4. ¿Hay actividades que **relacionan el tema** con otros campos de conocimiento?

Contenido de la Unidad Didáctica

1. ¿Respeta el **programa oficial**?

2. ¿La **redacción** y **formulación** de las actividades e informaciones para el alumnado, tienen en cuenta su nivel, sus intereses, motivaciones, su entorno socio-cultural?

3. El modo de presentación de los **contenidos**, ¿los hace asequibles al alumnado de acuerdo a su nivel de desarrollo psicoevolutivo?

4. ¿Se favorece en esta Unidad Didáctica la **actividad matemática**: conjeturar-probar, particularizar-generalizar, modos de razonamiento matemático, etc.?

5. ¿Plantea situaciones en **diferentes lenguajes**: numérico, figurativo, gráfico, algebraico?

Parte IV: Comentarios, sugerencias, recomendaciones y observaciones por parte de estudiantes de la Especialización en Didáctica de Matemáticas en Educación Secundaria en Venezuela (U.S.B.)

1. ¿Cómo **evaluaste** el aprendizaje de tus alumnos? ¿Puedes anexar las **actividades** ó **pruebas** que aplicaste?

2. La **utilización de Unidades Didácticas** propias o diseñadas y elaboradas por algún compañero: ¿puede mejorar el trabajo en equipo en el centro educativo? ¿puede facilitar la continuidad del aprendizaje de los alumnos? ¿puede facilitar el trabajo en aula?

3. ¿Describe **los sentimientos** que, como **profesor,** te invadieron durante la aplicación de la Unidad Didáctica?

- ¿esta experiencia, te la planteaste como un reto?, ¿como una práctica enriquecedora para tu formación profesional?, ¿la volverías a repetir?

- ¿hubo momentos de frustración?, ¿de ilusión y esperanza?, ¿tuviste seguridad en ti mismo, o más bien, inseguridad?, ¿fuiste creciendo en confianza en ti mismo como docente?

- ¿descubriste debilidades como docente y potencialidades a desarrollar? ¿descubriste el potencial de aprendizaje y de admiración de tus alumnos? ¿la experiencia repercutirá en tu estilo de enseñanza?

7. Respecto a las **impresiones de tus alumnos**, describe lo que observaste en ellos:

- ¿hubo momentos de desconcierto, colaboración, ilusión, etc.?

- ¿fue positivo el trabajo en equipo de los alumnos en vistas a la adquisición del conocimiento?

- ¿la experiencia repercutirá en su estilo de aprendizaje?

ANEXO 4

CUADRO DE ANÁLISIS DE LA PRUEBA FINAL

Según el tipo y nivel de cada pregunta

NIVEL	TIPO	PREGUNTAS
	A. Conceptos. Estructuras	1.a, b, c, d.
	B. Algoritmos. Técnicas instrumentales	2.a.
Bajo	C. Resolución de problemas	2.a.
	D. Lenguaje y visualización	2.b.
	E. Razonamiento y demostración	2.b.
	A. Conceptos. Estructuras	2.c. 3. 4. b.
	B. Algoritmos. Técnicas instrumentales	2.d. 3.a, b.
Medio	C. Resolución de problemas	2.d. 4.
	D. Lenguaje y visualización	2.e. 3. c, d. 4. b, c.
	E. Razonamiento y demostración	2.c. 4.
	A. Conceptos. Estructuras	5.a.
	B. Algoritmos. Técnicas instrumentales	5.b.
Alto	C. Resolución de problemas	5.a .b.
	D. Lenguaje y visualización	5.a.
	E. Razonamiento y demostración	5.c.

ANEXO 5

REJILLA DE EVALUACIÓN DE LA PRUEBA FINAL

Según el tipo y nivel de cada pregunta

Nº Prueba	BAJO					MEDIO					ALTO				
	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
Prueba N. 1															
Prueba N. 2															
Prueba N. 3															
Prueba N. 4															
Prueba N. 5															
Prueba N. 6															
Prueba N. 7															
Prueba N. 8															
Prueba N. 9															
Prueba N. 10															
Prueba N. 11															
Prueba N. 12															
Prueba N. 13															
Prueba N. 14															
Prueba N. 15															
Promedio															

ANEXO 6

RESULTADOS DE LA PRUEBA FINAL

Análisis cuantitativo y cualitativo

Primera fase de la investigación

Curso: 9º grado de Básica III – *INCAP Los Samanes*

Pregunta N. 1.	SI	NO	
1. Concepto de pendiente	15	15	
2. Concepto de ordenada en el origen	2	28	
3. Relación entre rectas paralelas	28	2	
4. Relación entre rectas perpendiculares	24	6	
5. Recta creciente ó decreciente	30	0	
Pregunta N. 2 a.	**SI**	**NO**	
1. Expresión algebraica correcta	9	21	
2. Comprensión de enunciado e intento de resolverlo	25	5	
Pregunta N. 2. b	**SI**	**NO**	
1. Gráfico correcto	9	21	
2. Intento de resolverlo	27	3	
3. Fórmula correcta*	4	17	* de los 21
Pregunta N. 2. c	**SI**	**NO**	
1. Respuesta correcta	29	1	
2. Razonamiento correcto (de los 29)*	24	5	*Buen concepto de P sobre r
3. Inadecuada expresión al argumentar	5		

Pregunta N. 2. d	**SI**	**NO**	
1. Respuesta correcta	7	23	
2. Intento de resolverlo (resolución)	21	9	
3. Relación adecuada entre pendientes*	11	19	*de rectas perpendiculares
4. Algoritmo adecuado para calcular el valor de b	14	16	
Pregunta N. 2 e	**SI**	**NO**	
1. Expresión y razonamiento correcto	15	15	
Pregunta N. 3 a	**SI**	**NO**	
1. Tabla y fórmula correctas	14	16	
2. Tabla correcta (de los 16)	4	12	
3. Fórmula correcta (de los 16)	3	13	
4. Uso correcto de algoritmo	18	12	
Pregunta N. 3 b	**SI**	**NO**	
1. Gráfica y fórmula correctas	4	26	
2. Gráfica correcta (de los 26)	13	13	
3. Fórmula con b correcto (de los 26)	25	1	
4. Uso correcto de algoritmo	15	15	
Pregunta N. 3 c	**SI**	**NO**	
1. Gráfica y tabla correctas	11	19	
2. Gráfica con (0,b) correcto (de los 19)	9	10	
3. Tabla con b correcto (de los 19)	9	10	
4. Visualización adecuada	12	18	
Pregunta N. 3 d	**SI**	**NO**	
1. Gráfica y tabla correctas	4	26	
2. Gráfica con (0, b) correcto (de los 26)	9	17	
3. Tabla con b correcto (de los 26)	9	17	
4. Visualización adecuada	6	24	
Pregunta N. 4	**SI**	**NO**	
1. Todas las respuestas correctas	4	26	
3. Intento de resolución	9	21	
4. Gráfica correcta (de los 26)	4		

Pregunta N. 5	**SI**	**NO**	
1. Enunciado inventado correcto	**9**	**21**	
2. Comprensión e intento de resolución	20	10	
3. Argumentación correcta	5	10	(de 15 que explican)
4. Uso correcto de algoritmos	12	8	(de las 20 que intentan)

ANEXO 7

ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LA PRUEBA FINAL

Cuantitativo y cualitativo

Primera fase de la investigación

Curso: 9º grado de Básica III – *INCAP Los Samanes*

A continuación se desglosan algunos comentarios adicionales del vaciado anterior (ANEXO 5), se realizó de pregunta en pregunta, se observarán datos que por su particularidad, etc. no se podían reflejar en el cuadro del Anexo 5.

Pregunta N.1. a.

- El concepto de pendiente como inclinación de la recta es conocida por el 50% de los casos; esto parece llamativo siendo tan importante haber lo entendido.
- En los demás casos, dicen: "gráfica" (n. 1, 2, 4, 19, 20, 21), "m" (n. 3, 7, 23); "fórmula" (n. 14); "abcisa" (n. 22); "coordenada" (n. 18, 25, 27); "pasa por el medio" (n. 15).
- Se observa como muchas personas tienen claro este concepto al hacer la conexión de lo que es la pendiente en la expresión algebraica, tabular y gráfica.

Pregunta N.1. b.

- Es más llamativo todavía comprobar que el nombre de ordenada en el origen en n. 1. b. sólo es dado por dos alumnas (n. 6, 8) y que se deja en blanco la pregunta en 11 pruebas (n. 3, 5, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 25, 26, 27).
- En las respuestas a las próximas preguntas (cfr. pregunta 3), y al utilizar las diferentes representaciones de función afín, se observa como muchas personas tienen claro este concepto al hacer la conexión de lo que es la ordenada en el origen en la expresión algebraica, tabular y gráfica. Es posible que este resultado se deba a la falta de costumbre de aprender la teoría con sus nombres adecuados.
- En los demás casos la contestación fue: " y " (n. 1, 2, 4, 7, 19, 22, 23)" ; "eje de y" (n. 14) "la abcisa" (n. 15); rectas perpendiculares (n. 18, 30); "pendiente" (n. 24, 28).

Pregunta N. 1. c.

- ❖ Es correcta la respuesta en 28 casos, sólo dos alumnas dicen que son “perpendiculares” (n. 16, 27).

Pregunta N. 1. d.

- ❖ Es correcta la respuesta en 24 casos; se deja en blanco en 5 casos (n. 7, 16, 17, 22, 23); y en una caso se dice que son “paralelas” (n. 27).

Pregunta N. 1. e.

- ❖ Es correcta la respuesta en el 100% de los casos: en clase se hizo énfasis y fue bien captado.

Pregunta N. 2. a.

- ❖ Respuesta correcta en 9 casos, e intento de resolución en 25 casos. Llama la atención estos resultados, parece que entienden mejor el significado de la ordenada en el origen en la forma gráfica.
- ❖ En bastantes casos la respuesta es $y = - 9x + 3$, es decir la misma función dada, que manipulan dando valores, sustituyen (0, 0). En dos casos la respuesta es: $y= –9x – 3$, es decir, cambian el signo de b. En un caso la respuesta es $y = 9x$, inversión del signo de la pendiente.

Pregunta N. 2. b.

- ❖ La respuesta es correcta en 9 casos e intentan resolverlo 27.
- ❖ Varios casos dan la fórmula correcta de la función pero no hacen el gráfico pedido (n. 5, 14, 25 y 29), es decir, en esto parece con los datos de m y b les es más fácil conseguir la expresión algebraica que graficar, el nivel de visualización debe crecer.

Pregunta N. 2. c.

- ❖ La respuesta es la correcta en 29 casos, pero el argumento utilizado es incorrecto en 5 de esos 29 casos. Es decir, en 24 casos entienden correctamente el concepto de punto sobre una recta.
- ❖ Además, en 5 casos el argumento es correcto pero la forma de expresarse es inadecuada. Se observa que falta práctica respecto a la comunicación oral o escrita de sus argumentos.
- ❖ En la mayoría de los casos utilizan la gráfica para argumentar, pero llama la atención que en varias oportunidades el razonamiento es analítico.

Pregunta N. 2. d.

- ❖ Respuesta correcta en 7 casos y pregunta en blanco en otros 7 casos.
- ❖ En las 16 pruebas restantes se observa un esfuerzo por resolver el ejercicio: en 4 casos se relaciona bien las pendientes de las rectas en forma analítica (el producto de ellas es -1), y en 7 casos realizan bien el algoritmo para hallar el valor de b.

- ❖ En varios casos los errores encontrados son de despeje de igualdades, y sustitución inversa de las coordenadas de P, pero el proceso de resolución es correcto.

Pregunta N. 2. e.

- ❖ Expresión y razonamiento correcto en el 50% de los casos; en algunos de ellos la respuesta es un poco genérica, sin detallar paso por paso.
- ❖ Llama la atención las diferencias de resultados con el ejercicio anterior; incluso, en varios casos se deja sin responder la pregunta N. 2 d (ó es muy incompleta) y sin embargo la 2. e está correcta.

Nota: En clase se hicieron ejercicios de este estilo y se capta que bastantes lo asimilaron.

Pregunta N. 3. a.

- ❖ Los resultados de la tabla anterior manifiestan con claridad el análisis cuantitativo y cualitativo de esta pregunta.

Nota: a este tipo de conexiones se dedicó un tiempo largo de clases, se ve cómo bastantes lo entendieron completamente o en parte. En muy pocos casos no hubo intento de respuesta.

Pregunta N. 4.

- ❖ Se observa que en muchos casos, 21, esta respuesta fue dejada en blanco a pesar de tratarse de un problema cerrado relativamente fácil de responder en un nivel medio, pienso que esto se debió a la falta de tiempo para la realización de la prueba y porque su puntaje respecto a la pregunta siguiente era menor.
- ❖ La gráfica en este problema era más directa, por lo que 8 de los 9 intentos la hicieron correctamente. Las omisiones ó equivocaciones de las partes c y d del problema, están relacionadas con dar la solución sin tener en cuenta el procedimiento pedido (gráfico ó mediante la utilización de la expresión algebraica).

Pregunta N. 5.

- ❖ Las respuestas correctas fueron 9; el razonamiento adecuado fue de 5 y los algoritmos aplicados por 12.

Nota: a este tipo de problemas abiertos se dedicó poco tiempo en clase, pero se dieron las principales orientaciones para llevarlos a cabo. Se nota el intento por parte de muchas alumnas (20) de hacer algo con la mayor creatividad posible.

ANEXO 8

REJILLA DE RESULTADOS DE LA PRUEBA FINAL

Evaluación según el tipo y nivel de cada pregunta

Segunda fase de la investigación

Curso: 2º año de Media Diversificada en Ciencias – *INCAP Los Samanes*

Nº Prueba	BAJO					MEDIO					ALTO				
	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
Prueba N. 1	5	5	5	5	5	5	5	5	4	5	4	5	5	5	3
Prueba N. 2	4	5	5	5	5	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5
Prueba N. 3	5	5	5	5	5	4	4	3	4	4	4	5	5	5	3
Prueba N. 4	5	5	5	2	2	3	1	2	1	3	2	1	2	3	1
Prueba N. 5	4	5	5	5	5	5	4	5	5	5	2	4	3	5	4
Prueba N. 6	3	5	5	2	2	3	3	4	3	4	5	4	5	5	2
Prueba N. 7	5	5	5	5	5	5	5	5	4	5	5	4	3	5	3
Prueba N. 8	5	5	5	5	5	5	5	5	4	5	5	5	4	5	3
Prueba N. 9	5	5	5	5	5	5	4	5	3	5	4	5	5	5	4
Prueba N. 10	3	1	1	1	1	5	4	4	3	5	5	5	5	5	5
Prueba N. 11	5	5	5	5	5	5	4	4	3	5	3	1	1	3	1
Prueba N. 12	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
Prueba N. 13	5	2	2	5	4	5	4	4	3	5	5	4	5	5	4
Prueba N. 14	4	1	1	5	5	5	3	4	3	5	2	2	3	3	3
Prueba N. 15	5	1	1	5	5	5	3	4	3	4	3	1	3	3	2
Promedio	**4,5**	**4**	**4**	**4,3**	**4,3**	**4,6**	**3,9**	**4,2**	**3,5**	**4,6**	**3,9**	**3,7**	**3,9**	**4,7**	**3,2**

ANEXO 9

RESPUESTAS AL CUESTIONARIO
PARA LA EVALUACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Perspectiva de un docente

Parte I. Datos relacionados con la aplicación o experimentación de la Unidad Didáctica

Nombre del profesor/a: Osvaldo Gómez

Títulos profesionales: (y/o estudios) Licenciado en Educación Matematica. UPEL. IPC (2001). Otros estudios: Ingeniería en Computación (USB), sin concluir. Especialización en Didáctica de la Matemática para Educación Secundaria (USB), por concluir.

Años de experiencia docente en el área: 5 años de docencia de Matemática en el aula y más de 20 años enseñando particularmente la misma materia.

Nombre de la Unidad Educativa: U.E. Gustavo H. Machado.

Localización: Catia (Caracas), cerca de la Estación del Metro de Gato Negro.

Curso al que se aplicó: 9º grado. Sección C.

Nº de horas de clase utilizadas: unas 12 horas.

Nº de alumnos: 44.

Otros datos de interés:

Parte II. Evaluación de la Unidad Didáctica (experimentada o aplicada) por parte del profesorado

1. ¿Han sido ***evaluados*** *todos los objetivos de aprendizaje de los alumnos propuestos en la Unidad Didáctica al nivel que se deseaba? (Con el instrumento de evaluación propuesto por cada docente). Anexar los instrumentos propios utilizados en la evaluación del aprendizaje de los alumnos.*

No fueron evaluados todos los objetivos de aprendizaje de la Unidad Didáctica, aún cuando, además de la prueba que se anexa, el profesor monitoreaba el trabajo de los diferentes grupos corrigiendo las hojas de trabajo entregadas en cada clase a los alumnos y que éstos, agrupados en equipo, debían responder como parte del proceso de instrucción. La prueba final de lapso, por ejemplo, debía incluir otros contenidos además del de la función afín. Esto hizo que la misma abarcara sólo algunos tópicos selectos del tema.

*2. ¿Qué **objetivos** han alcanzado los alumnos y a qué nivel?*

La mayor parte de los objetivos conceptuales se lograron a buen nivel. Quizás los conceptos de variable dependiente e independiente fueron menos trabajados y dominados.

Los objetivos procedimentales se alcanzaron en buen grado en los siguientes casos: identificación de una función afín y cálculo e interpretación de la pendiente de una recta.

En grado medio se alcanzó dominio en: relaciones entre los tipos de representación de la función afín, cálculo e interpretación de la ordenada en el origen y cálculo e interpretación de los puntos de corte con los ejes del plano cartesiano.

En menor grado, los jóvenes alcanzaron destrezas en: obtención de la expresión analítica asociada a una función afín gráfica ó recta, y el reconocimiento de una relación de proporcionalidad directa dada a través de una tabla, enunciado, gráfico ó expresión analítica.

Los objetivos actitudinales se alcanzaron a un nivel intermedio. Lo novedoso (y, a veces, angustiante) del sistema de enseñanza empleado, impidió que los jóvenes tuviesen mejores logros en el área actitudinal.

*3. La forma de presentar los **contenidos**, ¿ha sido adecuada en relación con los siguientes elementos: el nivel de maduración de los alumnos; su contexto social, económico y cultural; sus intereses y motivaciones?*

En general, la presentación de los contenidos fue adecuada para el nivel de madurez de los jóvenes, su contexto social, económico y cultural. Aún así, creo que ciertas actividades pueden adaptarse mejor a los intereses de los jóvenes.

*4. La naturaleza del **material** utilizado (material impreso, recursos audiovisuales, etc.) ¿ha facilitado la comprensión de los contenidos de la Unidad Didáctica?*

Ciertamente. El material impreso y otros recursos de aprendizaje sirvieron para impulsar la elaboración intelectual de los contenidos estudiados.

*5. La **redacción** y la **formulación** de las actividades, ¿han facilitado la comprensión de los alumnos?*

En general, las actividades fueron bien formuladas y con un lenguaje claro. Sin embargo, limitaciones propias de la edad y de la formación cultural de los educandos, a veces, interfirieron en el desarrollo del trabajo en clase.

*6. Las **actividades introductorias**, ¿han sido adecuadas y suficientes para el fin que se perseguía (motivar, repasar, situar el tema, etc.)?*

La actividad introductoria tuvo un impacto motivador favorable en el estudiantado, sirvió además de punto de partida en el desarrollo del tema.

Se usó como actividad introductoria la titulada *Descubriendo el número...*: elaboración de una tabla, calculo de la longitud de la circunferencia y del diámetro, de la razón entre la longitud y diámetro de cada medición, solamente, por razones de tiempo.

*7. Las **actividades de aplicación**, ¿han sido suficientes para facilitar la adquisición de conocimientos?*

Las actividades de aplicación bastan, teóricamente, para facilitar la adquisición de conocimientos. Por el tiempo, los jóvenes no las desarrollaron todas. Muchas veces el tiempo de clase era insuficiente y los muchachos debían concluir las actividades en casa.

*8. Las **actividades de recapitulación** (consolidación o ajuste de ritmos), ¿han permitido sintetizar los contenidos presentados en la Unidad Didáctica y tener una idea global de los mismos?*

Sí. Las actividades de consolidación sintetizaban a cabalidad los contenidos de la Unidad Didáctica. Algunas, como la titulada *La sala de fiestas* y la de *Aquiles y la Tortuga*, no se realizaron porque se encontraron muy complejas para este tipo de jóvenes.

*9. El **tiempo** invertido, ¿ha sido suficiente para alcanzar los objetivos deseados?*

El tiempo invertido alcanzó para resultados mínimos, esto sucedió porque sólo se tienen 3 horas de clase semanal en nuestro caso. En verdad, hacen falta más horas para trabajar mejor la Unidad Didáctica.

*10. La **organización de la clase**, ¿ha sido adecuada a las estrategias didácticas previstas (exposiciones, trabajos en grupo, puesta en común, debate, etc.)?*

La organización de la clase, en grupos de discusión, fue una estrategia didáctica adecuada. La mayoría de los equipos trabajó con esfuerzo y seriedad, a pesar de las dificultades en el manejo algebraico de las situaciones planteadas.

*11. Las estrategias seleccionadas, los recursos empleados, el enfoque de la Unidad Didáctica, etc. ¿han sido acordes con el estilo de **profesor** y su preparación científica?*

Las estrategias seleccionadas, los recursos empleados y el enfoque de la Unidad Didáctica fueron acordes al estilo del profesor y a su preparación científica. Esto, a pesar de que el docente está poco acostumbrado a trabajar con esta metodología de enseñanza.

Parte III: Evaluación de la Unidad Didáctica como recurso para ser utilizado por el profesorado

Visión global

*1. La **tipografía**, las **ilustraciones**, las **notaciones** y la **presentación**, ¿están cuidadas? ¿son adecuadas a la edad de los alumnos?*

Sí. Las anotaciones, ilustraciones y presentación son adecuadas a la edad de los alumnos.

*2. Hay un **índice** suficientemente detallado que dé una idea de su contenido?*

No ví un índice del contenido de la Unidad Didáctica, sólo ví un índice de objetivos y contenidos programáticos.

*3. ¿Hay referencias a los **programas oficiales**? ¿Son claras estas referencias?*

Observé pocas referencias al programa oficial (objetivo general y específico).

*4. ¿Hay una **guía para el profesor** que explicite, entre otros, los siguientes aspectos sobre su utilización? Aspectos: modelo de enseñanza, modo de intervención del profesor, estrategias didácticas, agrupamiento de los alumnos, tipos y modos de evaluación de los aprendizajes, temporalización, recursos necesarios.*

En la versión escrita que yo manejé, se proponía agrupar en equipos a los jóvenes y no se habla de evaluación del aprendizaje (eso se dejó a criterio del docente).

Implícitamente se reconocía que la estrategia didáctica era constructivista y el rol del profesor era el de un facilitador. Así lo asumí yo.

*5. ¿Hay referencias a la **programación** de cursos anteriores así como a la del propio curso? (respecto al modo de impartir el mismo tema en años anteriores o por otros profesores)*

No ví referencias al modo de impartir el mismo tema en años anteriores por otros profesores.

*6. ¿Hay **referencias bibliográficas** para la ampliación o profundización científica o didáctica en el tema?*

Sí. Hay referencias bibliográficas para ampliar el tema. Cada actividad indica su fuente.

Actividades introductorias

*1. ¿Hay **actividades preparatorias** para la introducción de los contenidos de la Unidad Didáctica?*

Sí. Hay actividad preparatoria para introducir los contenidos de la Unidad Didáctica. Yo la salté y comencé por *Descubriendo el número ...*

*2. ¿Qué **estrategias didácticas** se utilizan en estas actividades? ¿Son **pertinentes**?*

La actividad introductoria que utilicé resultó ser pertinente y motivadora. Produjo una situación activa de aprendizaje.

*3. ¿Cuál es su **finalidad**?: motivar el tema, repasar, situar el tema en relación a otros ya trabajados, poner de manifiesto las ideas y habilidades de los alumnos sobre los aspectos que van a ser trabajados, suscitar interrogantes, hacer una aproximación histórica al tema, otras.*

La finalidad es de motivación e introducción al tema.

Actividades de presentación de los contenidos

*1. La **importancia** relativa de los diferentes conceptos y procedimientos, ¿está puesta de relieve (recuadros, color, tipografía,...)?*

No ví que la importancia relativa de conceptos y procedimientos fuese puesta de relieve.

*2. Los **razonamientos matemáticos** aparecen: en el material del alumno (en totalidad o en parte), en otro lugar (en totalidad o en parte)*

Los razonamientos matemáticos figuran en el material del alumno.

*3. ¿Hay **ejercicios de aplicación** inmediata del contenido matemático?*

Sí. Hay espacios de aplicación del tema.

*4. La **presentación de los contenidos** se hace: a partir de un conjunto de actividades específicas del alumno, a partir de un conjunto de informaciones, combinando ambos elementos.*

La presentación de contenidos se hace a partir de las actividades específicas de los alumnos.

Actividades de aplicación de los contenidos

*1. ¿Hay **rúbricas** separadas? (resolución de problemas, ejercicios, investigaciones, comentarios de texto, experimentaciones, etc.)?*

No ví que se separaran los elementos enunciados en la pregunta.

*2. ¿Hay **clasificación** de actividades?: según la noción que hay que aplicar; según la dificultad.*

No observé clasificación de actividades ni según la noción a aplicar ni según el nivel de dificultad.

*3. ¿Hay varios **tipos** de estrategias didácticas (ejercicios, problemas, investigaciones, comentarios de texto, experimentaciones, etc.)?*

Sí. Básicamente ejercicios y problemas.

*4. ¿El **contexto de presentación** de las actividades es suficientemente variado (aspectos de la vida cotidiana, aplicación a otras disciplinas, historia de las matemáticas, situaciones lúdicas)?*

Sí. El contexto de presentación de actividades tiene buena variedad.

*5. ¿Las actividades son **motivadoras** para los alumnos a los que van dirigidas?*

Considero que la mayoría de las actividades son motivadoras.

*6. ¿Hay intención de proporcionar a los alumnos **ideas** potentes en matemáticas, **esquemas** eficaces, modos de **razonamiento**, **métodos** de investigación o de resolución de problemas, mediante ejemplos, investigaciones dirigidas, etc.?*

Me parece que sí. Hay una clara intención de proporcionar ideas y esquemas eficaces, y de potenciar el razonamiento y la resolución de problemas.

*7. En relación al trabajo personal, ¿la Unidad Didáctica permite al alumno **controlar** sus conocimientos?: memorización, comprensión, aplicación de automatismos, desarrollo de destrezas. ¿De qué forma?: autocontrol (respuesta sin explicación), autoevaluación (respuesta con explicación)*

Lo que más intenta favorecer es la comprensión y el desarrollo de destrezas. Las actividades inducen al análisis de situaciones y al pensamiento lógico.

*8. ¿Hay actividades de **recuperación**?*

No ví actividades de recuperación.

*9. ¿Hay actividades de **ampliación**?*

Sí. Algunas actividades pueden considerarse de ampliación.

Actividades de recapitulación

*1. ¿Hay **actividades síntesis** que requieren la aplicación de diversas nociones o métodos para su resolución?*

Creo que *Sala de fiestas* y *Aquiles y la tortuga* requieren aplicación de diversas nociones y métodos de resolución. Yo no trabajé con esas actividades.

2. ¿Hay ***problemas abiertos*** *(problemas complejos para cuya resolución no se dispone de una guía-lista de cuestiones y se necesita determinar los límites dentro de los cuales la solución es válida)?*

No encontré problemas abiertos.

3. ¿Hay actividades que requieren conocimientos desarrollados en ***otras unidades didácticas****?*

La mayor parte de las actividades de la Unidad Didáctica utilizan conocimientos encontrados dentro de la misma Unidad Didáctica. Quizás, *Sala de fiestas* es la que requiere más conocimientos de alguna Unidad Didáctica de geometría.

4. ¿Hay actividades que ***relacionan el tema*** *con otros campos de conocimiento?*

Sí. Hay actividades que se vinculan con otras áreas del saber humano.

Contenido de la Unidad Didáctica

1. ¿Respeta el ***programa oficial****?*

Sí. Respeta el programa oficial.

2. ¿La ***redacción*** *y* ***formulación*** *de las actividades e informaciones para el alumnado, tienen en cuenta su nivel, sus intereses, motivaciones, su entorno socio-cultural?*

Sí. La redacción de las actividades está de acorde con los intereses y el entorno socio-cultural de los jóvenes (en general).

3. El modo de presentación de los ***contenidos****, ¿los hace asequibles al alumnado de acuerdo a su nivel de desarrollo psicoevolutivo?*

Sí. La presentación de los contenidos casi siempre los hace asequibles a este tipo de alumnos. Cuando se requirió aclaratoria de lenguaje, el profesor la brindó.

4. ¿Se favorece en esta Unidad Didáctica la ***actividad matemática****: conjeturar-probar, particularizar-generalizar, modos de razonamiento matemático, etc.?*

Sí. Creo que las capacidades de razonar matemáticamente son impulsadas por esta Unidad Didáctica.

5. ¿Plantea situaciones en ***diferentes lenguajes****: numérico, figurativo, gráfico, algebraico?*

Sí. Hay variedad de lenguajes en la secuencia de actividades pautadas en el desarrollo de la Unidad Didáctica.

Parte IV: Comentarios, sugerencias, recomendaciones y observaciones por parte de estudiantes de la Especialización en Didáctica de Matemáticas en Educación Secundaria en Venezuela (USB)

*1. ¿Cómo **evaluaste** el aprendizaje de tus alumnos? ¿Puedes anexar las **actividades** ó **pruebas** que aplicaste?*

Evalué con una prueba que incluía también ejercicios de distancia entre dos puntos en el plano y ecuaciones irracionales. Se anexa el instrumento de evaluación [96].

*2. La **utilización de Unidades Didácticas** propias o diseñadas y elaboradas por algún compañero: ¿puede mejorar el trabajo en equipo en el centro educativo? ¿puede facilitar la continuidad del aprendizaje de los alumnos? ¿puede facilitar el trabajo en aula?*

El uso de la Unidad Didáctica ciertamente puede mejorar el trabajo del docente en equipo y puede favorecer el aprendizaje de los alumnos y el trabajo en el aula.

*3. ¿Describe **los sentimientos** que, como **profesor,** te invadieron durante la aplicación de la Unidad Didáctica?*

- ¿esta experiencia, te la planteaste como un reto?, ¿cómo una práctica enriquecedora para tu formación profesional?, ¿la volverías a repetir?

Sin duda, volveré a repetir este tipo de experiencias.

- ¿hubo momentos de frustración?, ¿de ilusión y esperanza?, ¿tuviste seguridad en ti mismo, o más bien, inseguridad?, ¿fuiste creciendo en confianza en ti mismo como docente?

Primero, estuve inseguro y ansioso. Luego me adapté aunque considero que se requiere fortaleza emocional y disposición positiva de ánimo para dirigir esas clases con esta metodología de enseñanza [97].

- ¿descubriste debilidades como docente y potencialidades a desarrollar? ¿descubriste el potencial de aprendizaje y de admiración de tus alumnos? ¿la experiencia repercutirá en tu estilo de enseñanza?

A veces uno ve que estas actividades favorecen el pensamiento matemático de ciertos alumnos. También, en contrapartida, hay estudiantes con escaso interés, que participan poco en el trabajo grupal y sólo buscan la calificación para aprobar.

Algunos jóvenes no se sienten a gusto con esta forma de trabajo del docente, prefieren la enseñanza tradicional a la cuál están acostumbrados.

---

[96] Al final de este anexo.

[97] En todas las actividades trabajadas en el aula de clase, el profesor tomó el rol de facilitador y de moderador; no fue expositor en ningún momento.

Es indudable que mi estilo de enseñanza ha empezado a sufrir cambios que buscan favorecer la interacción alumno-alumno y la comprensión razonada de los objetos matemáticos.

7. Respecto a las ***impresiones de tus alumnos*** *¿describe lo que observaste en ellos?*

- *¿hubo momentos de desconcierto, colaboración, ilusión, etc.?*

Ciertamente hubo jóvenes que se resistieron a la experiencia y les costó comprometerse. Otros tenían grandes fallas que les dificultaban el aprendizaje.

- *¿fue positivo el trabajo en equipo de los alumnos en vistas a la adquisición de conocimiento?*

Observé un buen aprendizaje en un número aceptable de estudiantes. Obtener la expresión algebraica a través de la tabla o la gráfica fue logrado por muy pocos alumnos.

- *¿la experiencia repercutirá en su estilo de aprendizaje?*

Pienso repetir esta experiencia durante el curso escolar 2005-2006, con algunos ajustes.

Preguntas de la prueba final aplicada en la Unidad Educativa *Gustavo H. Machado*

1.Nombra las diferentes representaciones de la función afín (1 punto).

2. Dada la función afín $y = 3x - 2$. ¿Cuál es la pendiente? (1 punto).

3. Una piscina tienen una llave que vierte 20 litros de agua cada minuto. Si el volumen de agua que inicialmente hay en la piscina es de 10 litros, completa la tabla presentada abajo y encuentra la expresión algebraica que relaciona el volumen y el tiempo (2 puntos).

t	0				
v	10				

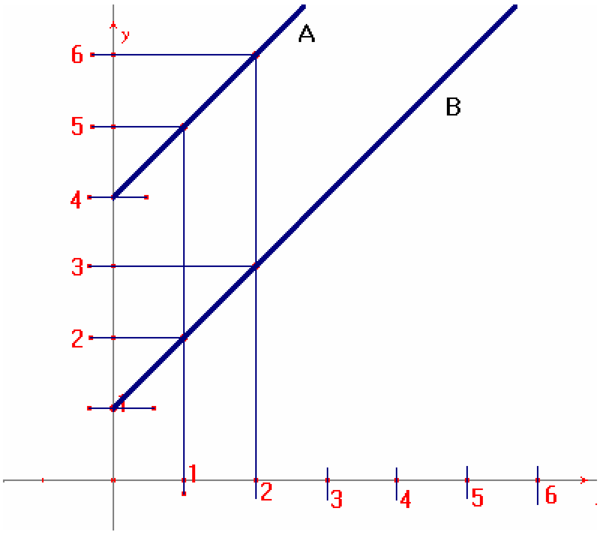
4. Considera la siguiente tabla de datos:

x	1	2	3	4
y	10	8	6	4

a) Construya la gráfica en el plano cartesiano (1 punto).
b) ¿Es una función creciente o decreciente? (1,5 puntos).
c) Con los datos de la tabla, redacte un problema (2,5 puntos).

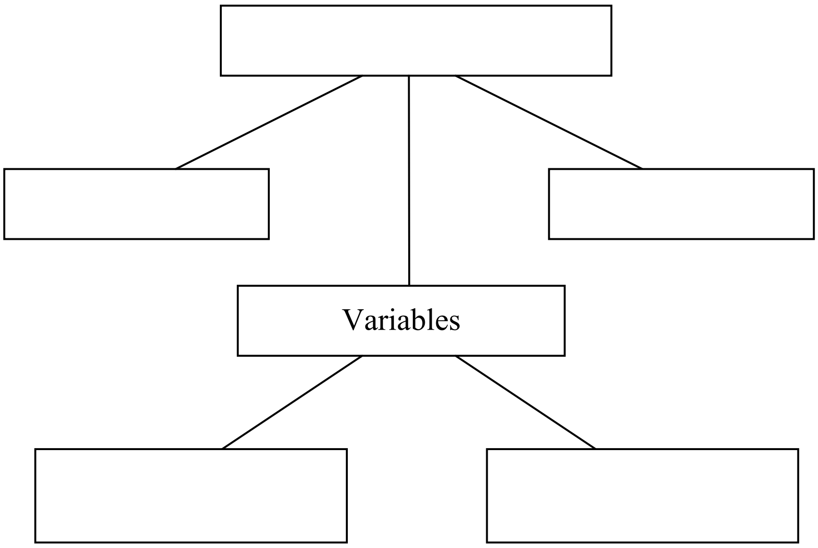
5. Se tiene la recta $y = ax + 3$. Si $(1, 5)$ pertenece a la recta, demuestre que $a = 2$ (1,5 puntos).

6.



Demostrar que las rectas A y B son paralelas (2 puntos).

7. Coloca en su lugar los elementos de la función $y = mx + b$: variable dependiente, variable independiente, ordenada en el origen, función afín y pendiente (2,5 puntos).


Variables

ANEXO 10

APUNTES DE UNA ALUMNA DE 9º GRADO

Alumna: Abril Marquina. ***INCAP Los Samanes***

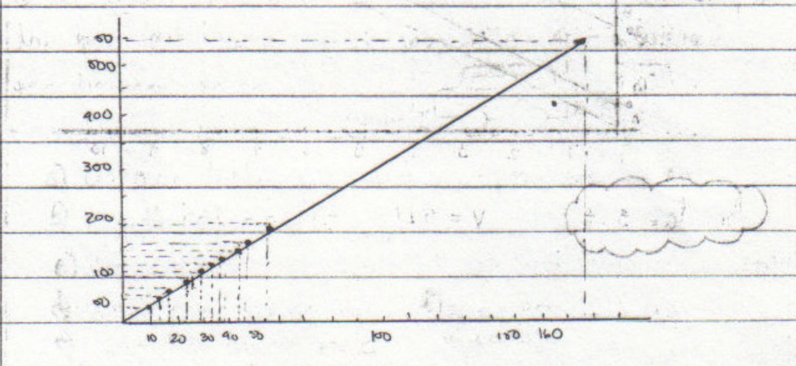
Primera fase de la investigación

Caracas, 18-2-05

$\frac{L}{d} = \pi = 3{,}1416$

Descubriendo el número ?

objeto	longitud cm.	Diametro cm.	l/d.
1	523	166	3,152
2	170,5	53,6	3,148
3	144	46	3,130
4	138,5	44	3,147
5	114,5	36,8	3,11
6	110,5	35	3,157
7	102	32,3	3,157
8	85,5	27,1	3,154
9	67	21,6	3,101
10	51	16,5	3,091
11	36	11,7	3,076



Caracas, 22-2-05

Continuación

Una piscina tiene una llave que vierte 5 L. de agua x minuto

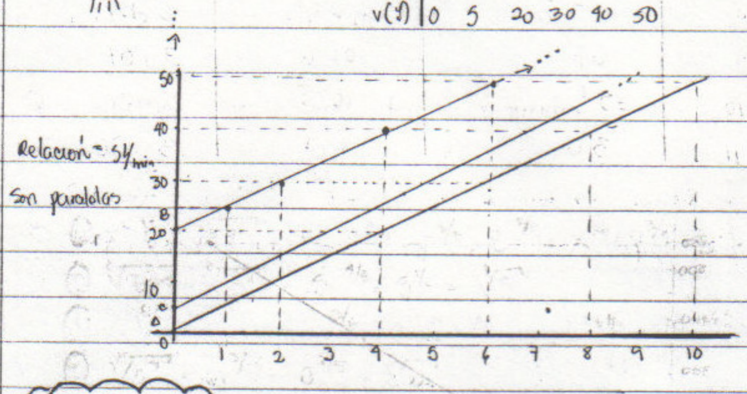
A= si el volumen inicial de la piscina es de 0 litros hacer las formulas y graficas

B= si el volumen inicial de agua es de 20 L hacer

Problema= A) $V_0 = 0$ L.

5 L/m

t(min)	0	1	4	6	8	10
v(l)	0	5	20	30	40	50



fórmula = 5 . t

$V = 5\,L/_{min}$ 50 min = 250 l/min

b=

T	0	1	2	4	6	8	10	60
V	20	25	30	40	50	60	70	320

fórmula = $V = 5 \cdot t + 20$

$V = 5\, l/_{min} = 40\, l/_{m}$

c= $V_0 = 5\, ml$ obten las recta (0,5):

fórmula $V = 5 \cdot t + 5$

CONCLUSIÓN = se relacionan 5 l/ml la inclinación de las rectas, no todas parten del mismo punto; no tienen el mismo volumen inicial, no tienen ningun punto en común porque las rectas graficas porque tienen la misma pendiente; tienen en común **5·T** Pendiente tiempo; las fórmulas se diferencian en el volumen inicial, del eje vertical (0,0), (0,5), (0,10), (0,20) V_0= volumen inicial (ordenada en el origen)

$y = mx + b$ → ordenadas en el origen

m → pendiente

x → variable independiente

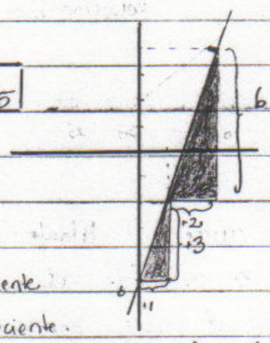
Caracas, 1-3-05

Continuación

① Representar gráficamente las siguientes funsiones

x	0	1	3
y	-5	-2	4

$\boxed{f(x) = 3x - 5}$



✓ Pendiente = 3

✓ origen de ordenada = -5

✓ $m = 0 \rightarrow 0 . x + 5$

✓ $y = 3x - 5 \longrightarrow m_1 > 0 \Longrightarrow$ creciente

✓ $y = -3x - 5 \longrightarrow m_2 < 0 \Longrightarrow$ decreciente.

$\frac{6}{2} = \frac{3}{1} = 3 \rightarrow$ P. ✓ $\frac{y}{x}$ ✓

$\boxed{f(x) = 3x - 5}$

• para hallar pendiente con la gráfica

• para hallar valor a comparable a la variable. El aumento de la x. $\frac{3}{1} = \frac{6}{2} = 3$ = Pendiente

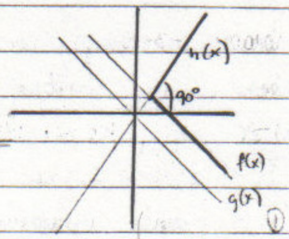
• Para hallar las ordenadas del origen $y = mx + b$.

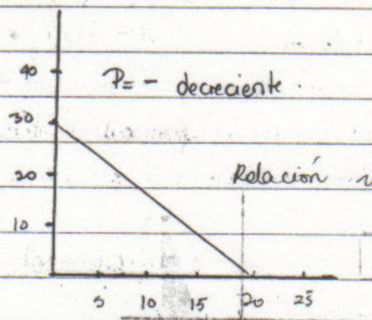
-5 donde se corta el eje y con la recta

② $P = -3$ $f(x) = 2 - 3x$. Pendiente $m = +\frac{1}{3}$

$b = 2$.

③ $h(x) = \frac{1}{3} \cdot x$ Perpendicular a $f(x)$.

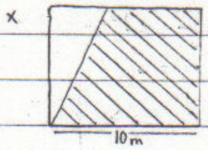




P= - decreciente

Relación vida diaria

En un auditorio de forma cuadrada un lado mide 10 metros al colocar una pared elástica calcular el área sombreada en función de la distancia

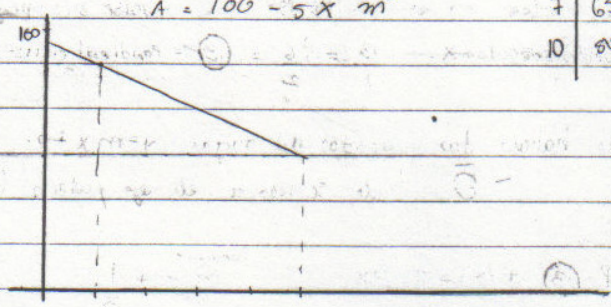


$A = 10^2 -$

$A = 100 - \frac{10 \cdot x}{2}$

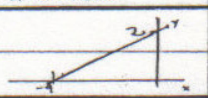
$A = 100 - 5x \ m^2$

x	A
0	100
2	90
7	65
10	50

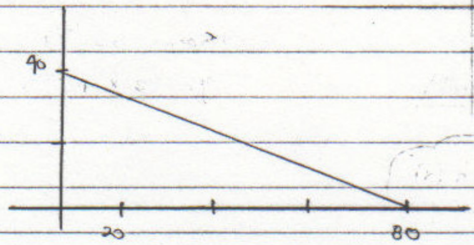


4 Completa la siguiente cuadro.

A

Grafica	tabla	Formula
		
	x: 0, 10, 20 y: 15, 0, -15	
		$Y = 4$.
		$Y = \frac{1}{3}X - 3$

b- Invente un ejercicio cuya gráfica es:

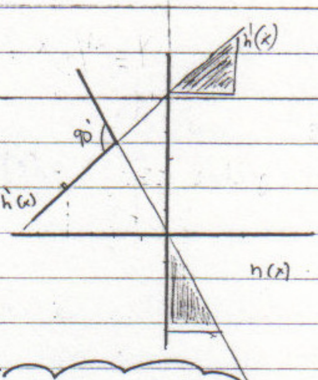


C- Un motorizado parte de caracas a Maracay (120 Km) se sabe que la función $d(t)$ es afín $d(0) = 120$ Km. y $d(2) = 60$ Km. Represente la gafica. hallar la formula $d(t)$ = la distancia en Km. que separa al motorizado de Maracay en el intante T. de tiempo.

Caracas, 8-3-05

Continuación

① Obtener la función afín que sea perpendicular a la recta $h(x) = -\frac{3}{2}x$ y que pase por el punto $(-4,2)$.



$m_h = -3/2$

$m = 2/3$

$y = \frac{2}{3}x + b$

$2 = 2/3 \cdot (-4) + b$

despejo $b = 14/3$

$y = 2/3\,x + 14/3$

fórmular la h'(x)

* Entender el enunciado y "graficar"
* Hallar la pendiente de la recta perpendicular a partir de la recta que da el ejercicio
* Escribir la fórmula de la recta perpendicular
* Sustituir (-4, 2) en la fórmula hallada y hallar el valor de b
+ Escribir la fórmula con todos sus valores

ANEXO 11

TAREAS DE UNA ALUMNA DE 9º GRADO

Alumna: Elizabeth Meneses. ***INCAP Los Samanes***

Primera fase de la investigación

Caracas, 9 de Marzo del 2005
Elizabeth Meneses #16
Guía de Matemática

16/20

Función Afín

1) El espacio muerto de un carro es la distancia entre la base del carro y el piso
La formula formula para calcular el espacio muerto es:
$e = 40 - \left(\frac{1}{10} . w\right)$ //

kg	cm
250	15
300	10
350	5
400	0

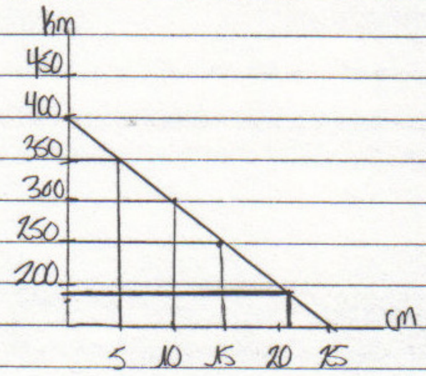
A) $e = 40 - \left(\frac{1}{10} . 250\,kg\right) = \frac{40 - 25\cancel{0}\,kg}{\cancel{10}} = 40 - 25\,kg = e = 15cm$

B) $e = 40 - \left(\frac{1}{10} . 300\,kg\right) = \frac{40 - 30\cancel{0}\,kg}{\cancel{10}} = 40 - 30\,kg = 10cm$

c) $e = 40 - \left(\frac{1}{10} . 350\,kg\right) = \frac{40 - 35\cancel{0}\,kg}{\cancel{10}} = 40 - 35 = 5cm$

d) $e = 40 - \left(\frac{1}{10} . 400\,kg\right) = \frac{40 - 40\cancel{0}\,kg}{\cancel{10}} = 40 - 40 = 0cm$

Grafico =



Kg	cm
180	22

b) Usa la grafica para buscar e (El espacio cuando W es igual a 180 Kg

$e = 40 - \left(\frac{1}{10} \cdot 180\,Kg\right) = \frac{40 - 18\cancel{0}\,Kg}{1\cancel{0}} = 40 - 18 =$

$e = 22\,cm$ // (Ver en el grafico Anterior)

c) Cuanto vale e si W es igual a 360 kg

$e = 40 - \left(\frac{1}{10} \cdot 360\,kg\right) = \frac{40 - 36\cancel{0}\,kg}{1\cancel{0}} = 40 - 36 = 4\,cm$ //

d) cual es el valor de w, cuando el espacio es igual a 0 cm ¿Que le ocurre al carro en ese momento?

$0 = 40 - \left(\frac{1}{10} \cdot w\right)$

$0 = 40 - \frac{1}{40} w$

$\left(\frac{\frac{-40}{1}}{\frac{-1}{10}}\right) = w = 400 = w$ //

El carro aumenta de peso

e) Cuando el espacio muerto es de 12 cm que que peso tiene el carro

$12cm = 40 - \left(\frac{1}{10} \cdot w\right)$ $\qquad \left(\dfrac{\frac{-28}{1}}{\frac{-1}{10}}\right) = w$

$12\,cm = 40 - \frac{1}{10} w$

$\dfrac{12 - 40}{-\frac{1}{10}} = w$ $\qquad W = 280\,kg$ //

2) Representa gráficamente las funciones

a) $F(x) = 2x - \frac{5}{3}$

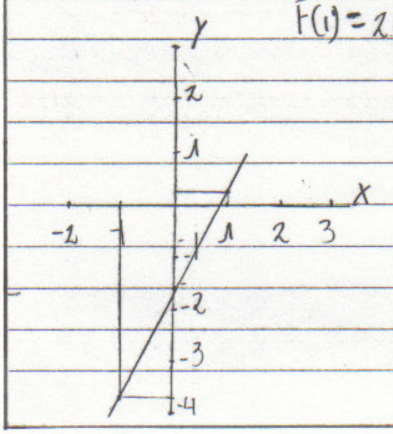
x	y
-1	-11/3 / 3,66
0	-5/3 / 1,66
1	1/3 / 0,33

$F(-1) = 2.(-1) - \frac{5}{3} = -2 - \frac{5}{3} = \frac{-6-5}{3} = \frac{-11}{3} = 3,66$

$F(0) = 2.(0) - \frac{5}{3} = 0 - \frac{5}{3} = \frac{-5}{3} = 1,66$

$F(1) = 2(1) - \frac{5}{3} = 2 - \frac{5}{3} = \frac{6-5}{3} = \frac{1}{3} = 0,33$

mejor trabajar con fracciones



Halla Pendiente:

$m = \dfrac{y^2 - y^1}{x^2 - x^1} = \dfrac{\frac{-5}{3} - \left(\frac{11}{3}\right)}{0 - (-1)} = \dfrac{\frac{-5}{3} + \frac{11}{3}}{0 + 1} = \dfrac{\frac{-5+11}{3}}{\frac{1}{1}} = \left(\dfrac{\frac{6}{3}}{\frac{1}{1}}\right) =$

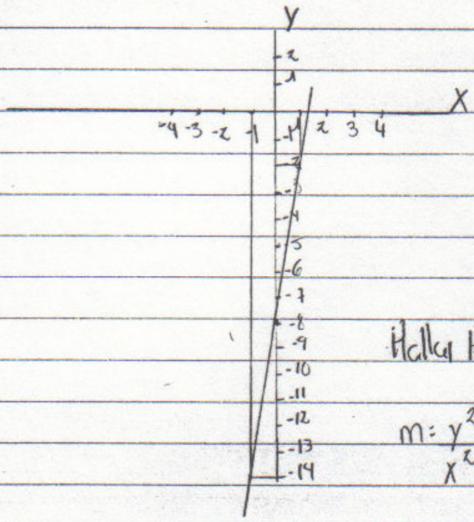
$\frac{6}{3} = 2$ // $\quad m = 2$

b) $g(x) = 2(3x-4) = 6x-8$ / $F(x) = 6x-8$

x	y
-1	-14
0	-8
1	-2

$F(-1) = 6(1)-8$
$= -6-8$
$= -4$

$F(0) = 6(0)-8 = 0-8 = -8$
$F(1) = 6.(1)-8 = 6-8 = -2$



$A = (\overset{x^1}{0}, \overset{y^1}{-8})$
$B = (\underset{x^2}{1}, \underset{y^2}{-2})$

Hallar Pendiente =

$$m = \frac{y^2 - y^1}{x^2 - x^1} = \frac{-2-(-8)}{1-0} = \frac{-2+8}{1} = \frac{6}{1} = 6$$

$m = 6$ //

c) $H(x) = -4x+1$

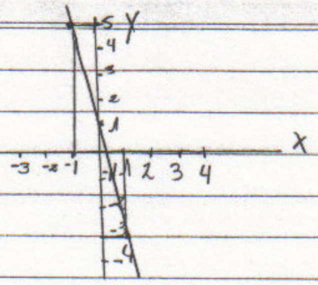
$F(x) = -4x+1$
$F(1) = -4(-1)+1 = 4+1 = 5$
$F(0) = -4(0)+1 = 0+1 = 1$
$F(-1) = -4(-1)+1 = -4+1 = -3$

x	y
-1	5
0	1
1	-3

Hallar Pendiente.

$$m = \frac{y^2 - y^1}{x^2 - x^1} = \frac{(-3)-1}{1-0} =$$

$$m = \frac{-4}{1} = 4 = m = -4$$ //



3) A) Pertenece el punto A(3,4) a la grafica de la función $F(x) = x + 1$ ¿y B(-5,-4)? ¿y C(-1,1)? ¿Porque?

$F(x) = x + 1$

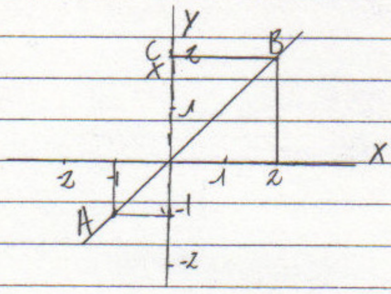
✓ $F(3) = 3 + 1 = 4$

✓ $F(-5) = -5 + 1 = 4$

✗ $F(-1) = -1 + 1 = 1$

los puntos A y B pertenecen a la función $F(x) = x + 1$ porque al darle valor a x da el resultado y Pero el punto C(-1+1) no pertenece a la grafica de la función porque el punto X no le corresponde al punto y

b) Sean los puntos A(-1,1), B(2,2) y C(-1,2) determina la función afín que pasa por A y B ¿Pertenece C a esa recta?



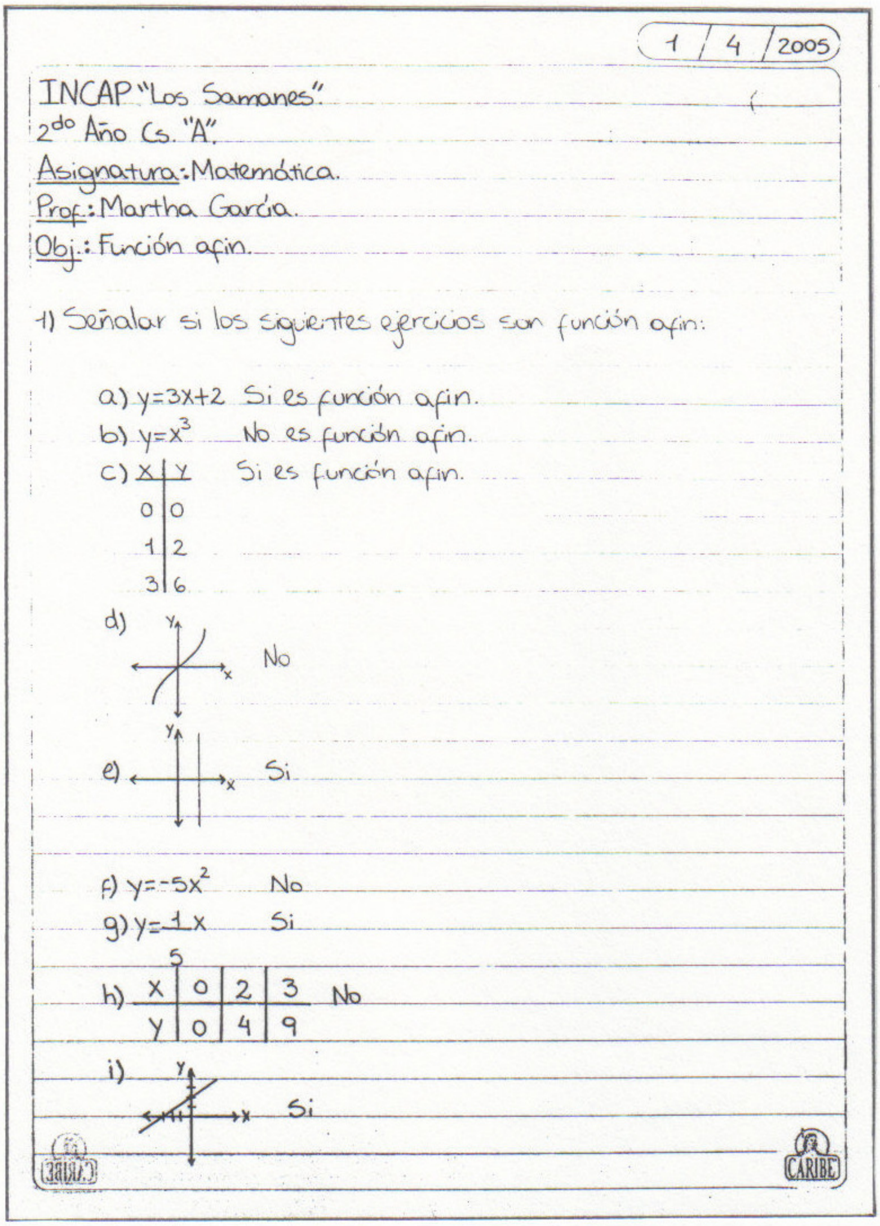
El punto C no pertenece a esa recta

ANEXO 12

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

2º año M.D. INCAP Los Samanes

Segunda fase de la investigación



1 / 4 / 2005

INCAP "Los Samanes".
2do Año Cs. "A".
Asignatura: Matemática.
Prof.: Martha García.
Obj.: Función afín.

1) Señalar si los siguientes ejercicios son función afín:

a) $y=3x+2$ Si es función afin.
b) $y=x^3$ No es función afin.
c) Si es función afin.

x	y
0	0
1	2
3	6

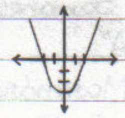
d) No

e) Si

f) $y=-5x^2$ No
g) $y=\frac{1}{5}x$ Si
h) No

x	0	2	3
y	0	4	9

i) Si

j)  No.

K)

x	2	5
y	-1	8

Si.

 función x^2

Variable independiente: x
Variable dependiente: y

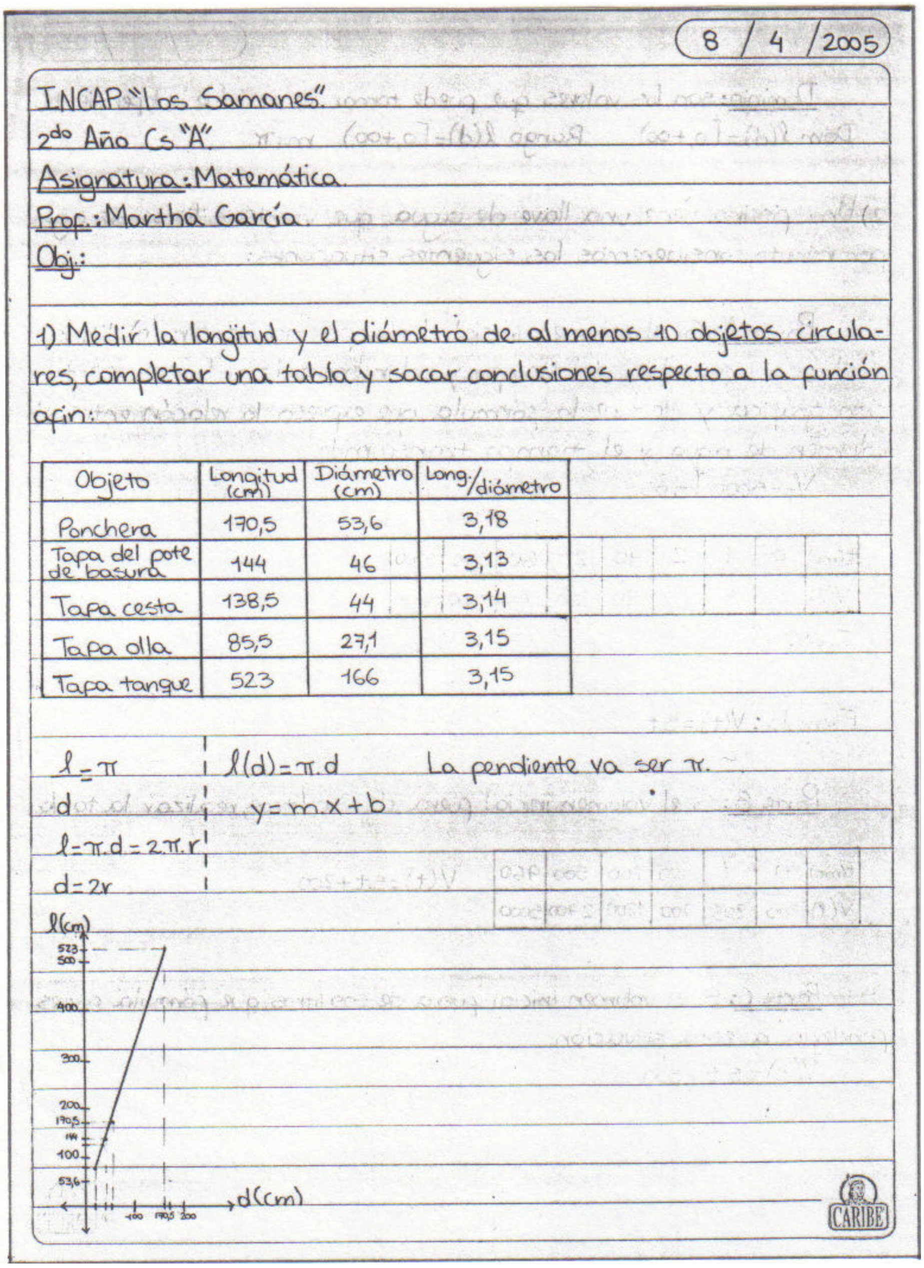
<u>Funciones lineales</u>: rectas que pasan por el origen (0,0).

ANEXO 13

APUNTES DE UNA ALUMNA DE 2º AÑO M.D.

Alumna: Airam Castro. ***INCAP Los Samanes***

Segunda fase de la investigación



8 / 4 / 2005

INCAP "Los Samanes"
2do Año Cs "A"
Asignatura: Matemática
Prof.: Martha García
Obj.:

1) Medir la longitud y el diámetro de al menos 10 objetos circulares, completar una tabla y sacar conclusiones respecto a la función afín:

Objeto	Longitud (cm)	Diámetro (cm)	Long./diámetro
Ponchera	170,5	53,6	3,18
Tapa del pote de basura	144	46	3,13
Tapa cesta	138,5	44	3,14
Tapa olla	85,5	27,1	3,15
Tapa tanque	523	166	3,15

$\frac{l}{d} = \pi$ | $l(d) = \pi . d$ La pendiente va ser π.

$l = \pi . d = 2 . \pi . r$ | $y = m . x + b$

$d = 2r$

Dominio: son los valores que puede tomar la variable independiente.

Dom $l(d) = [0, +\infty)$ Rango $l(d) = [0, +\infty)$ $m = \pi$.

2) Una piscina tiene una llave de agua que vierte 5 litros de agua por minuto, consideremos las siguientes situaciones:

Parte A: Si el volumen inicial de la piscina es cero (0) litros, elaborar una tabla del tiempo y volumen, realizar la representación gráfica y deduce la fórmula que expresa la relación entre el volumen de agua y el tiempo transcurrido.

$V_T = 5000$ litros.

t(min)	0	1	2	10	20	60	500	1000
V(l)	0	5	10	50	100	300	2.500	5.000

Tabla 1.

Fórmula: $V(t) = 5.t$

Parte B: Si el volumen inicial fuera de 200 litros, realizar la tabla

t(min)	0	1	100	200	500	960
V(l)	200	205	700	1200	2700	5000

$V(t) = 5.t + 200$

Parte C: Si el volumen inicial fuera de 500 litros, qué fórmula correspondería a esta situación.

$V(t) = 5.t + 500$

15 / 4 / 2005

IINCAP "Los Samanes"

2do Año Cs. "A"

Asignatura: Matemática.

Prof: Martha García.

Obj:

$y=-2x+6$

x	0	2	6	9
y	6	2	-6	-12

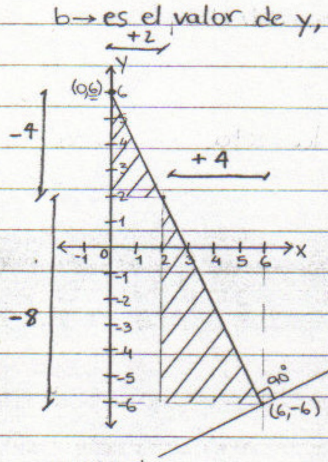
Incrementos de x: +2, +4, +3

Incrementos de y: -4, -8, -6

$\frac{-4}{2} = \frac{-8}{4} = \frac{-6}{3} = -2 = m$

m → valor de un cociente: incrementos de y entre incrementos de x.

b → es el valor de y, cuando x = 0.



$b = 6$

$m = \frac{-4}{2} \quad \frac{-8}{2}$

$m = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$y=mx+b$

$y=-2x+6$

$m=-2 \quad b=6$

$m>0$ ↗ creciente

$m<0$ ↙ decreciente

$m=0$ paralela eje oy.

<u>Creciente</u>: cuando la x aumenta, los correspondientes valores de y aumentan (idem si x, y disminuyen).

<u>Decreciente</u>: cuando la x aumenta (disminuye), entonces la y disminuye (aumenta).

Recta perpendicular:

$y = m_1 x + b$

$y = \frac{1}{2} x + b$ pasa $(6,-6)$

$-6 = \frac{1}{2} \cdot 6 + b \rightarrow -6-3 = b \rightarrow b = -9$

$\boxed{y = \frac{1}{2} x - 9}$ → Recta perpendicular

1) Sea la recta $g(x) = \frac{3}{5}(x-1)$. Calcular la recta. Calcular la recta paralela que pasa por el punto $(1,-1)$.

$g(x) = \frac{3}{5}(x-1) = \frac{3}{5} x - \frac{3}{5}$

$m_g = \frac{3}{5} \quad b_g = -\frac{3}{5}$

$m_{\perp} = -\frac{5}{3} \quad b_{\perp} = 0 \longrightarrow y = -\frac{5}{3} x$

$\parallel g(x) \quad (1,-1)$

$m_{\parallel} = \frac{3}{5} \quad b_{\parallel} = ? \quad y = \frac{3}{5} x + b$

$(1,-1)$ sustituyo $-1 = \frac{3}{5} + b \Rightarrow -1 - \frac{3}{5} = b \rightarrow b = -\frac{8}{5}$

$\boxed{y = \frac{3}{5} x - \frac{8}{5}}$

ANEXO 14

PRUEBAS FINALES

Alumna: Jennifer Ramos. 9º grado. ***INCAP Los Samanes***

Primera fase de la investigación

Función Afin

1) Completa los espacios en blanco con la palabra correcta:

a) la pendiente de una función afin es la pendiente de la recta.

b) la segunda coordenada del punto de intersección de una recta con el eje vertical de coordenadas se llama punto de corte. ✗

c) las rectas con igual pendiente son paralelas ✓

d) las rectas $y = -5x + 7$; $y = x.\frac{1}{5}$ son perpendiculares. ✓

e) una recta es decreciente cuando su pendiente es negativa y es creciente cuando es positiva. ✓

2) Resuelve los siguientes ejercicios en el espacio en blanco:

a) sea $f(x) = -9x + 3$. ¿cuál es la expresión algebraica (fórmula) de la recta paralela a $f(x)$ y que pasa por el origen de coordenadas ó punto $(0,0)$.

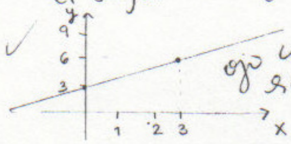
La recta paralela a $f(x)$ tiene como pendiente $m = -9$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 0 = -9(x - 0) \Rightarrow y = -9x$ ✓

Las rectas paralelas tienen la misma pendiente

b) si la pendiente de una recta es 1 $(m = 1)$ y la ordenada en el origen es 3 $(b = 3)$. Elabora la gráfica de la recta.



ojo con la scale

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 3 = 1(x - 0)$

$y = x + 3$

c) Sean los puntos A(-1,-1), B(2,2) y C(-1,2). Determina la función afin que pasa por los puntos A y B. ¿Pertenece C a esa recta? Explica la respuesta.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $\quad y - y_1 = m(x - x_1)$

$m = \frac{-1-2}{-1-2} = \frac{-3}{-3} \Rightarrow m = 1$

$y - 2 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x$

$f(-1) = -1$ esto quiere decir que C(-1,2) no pertenece a esta recta.

d) calcula la expresión algebraica (fórmula) de la recta que pasa por el punto P(3,4) y es perpendicular a $g(x) = -\frac{3}{2}x$

$m_1 \cdot m_2 = -1$ $\quad m_1 = -\frac{3}{2}$

$m_2 = \frac{-1}{m_1} = \frac{-1}{-\frac{3}{2}} \Rightarrow m_2 = \frac{2}{3}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 4 = \frac{2}{3}(x - 3) \Rightarrow y - 4 = \frac{2}{3}x - 2 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + 2$

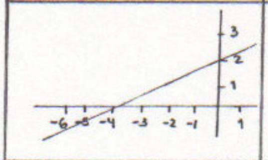
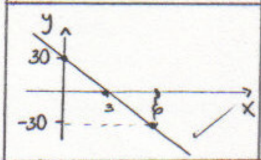
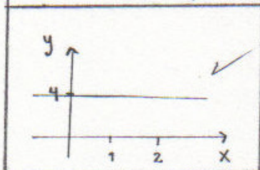
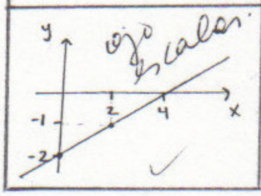
$f(x) = \frac{2}{3}x + 2.$

e) Explica con tus palabras los pasos para resolver el ejercicio anterior.

cuando dos rectas son perpendiculares la multiplicación de sus pendientes es igual a -1.

con la pendiente de la recta perpendicular a g(x) y el punto P se busca la ecuación de esta recta. (f(x)).

3) Completa el siguiente cuadro.

<table>
<tr><th>Grafica</th><th>Tabla</th><th>Fórmula</th></tr>
<tr><td></td><td><table><tr><td>x</td><td>-4</td><td>0</td><td>4</td></tr><tr><td>y</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td></tr></table></td><td>$y = \frac{1}{2}x + 2$</td></tr>
<tr><td></td><td><table><tr><td>t</td><td>0</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>e</td><td>30</td><td>0</td><td>-30</td></tr></table></td><td>$y = -10x + 30$</td></tr>
<tr><td></td><td><table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>y</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr></table></td><td>$y = 4$</td></tr>
<tr><td>
ojo escala.</td><td><table><tr><td>x</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>y</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td></tr></table></td><td>$f(x) = \frac{1}{2}x - 2$</td></tr>
</table>

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{0-2}{-4-0} \Rightarrow m = \dfrac{1}{2}$ $\qquad y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 0 = \frac{1}{2}(x+4) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$

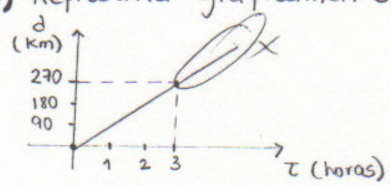
$m = \dfrac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \dfrac{30-0}{0-3} \Rightarrow m = -10$ $\qquad y - y_3 = m(x - x_3)$

$y - 0 = -10(x-3) \Rightarrow y = -10x + 30$

4) Resuelve el siguiente problema.

Para ir de caracas a Valencia (270 Km) elegimos como Transporte un autobús que viaja a la misma velocidad durante Todo el Trayecto (90 Km/h). sea $d(T)$ la distancia en km que nos separa de caracas en el instante τ de nuestro viaje (τ se mide en horas). si se sabe que $d(\tau)$ es una función afin con $d(0) = 0$ Km y $d(3) = 270$ Km.

a) Representa gráficamente la función $d(\tau)$



b) Determine los números m y b Tales que $d(T) = mT + b$

A (0,0)   B (3, 270)

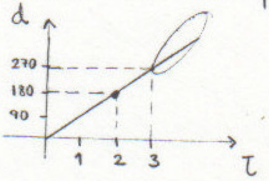
$$m = \frac{270 - 0}{3 - 0} = \frac{270}{3} \Rightarrow m = 90$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = 90(x - 0) \Rightarrow y = 90x$$

$d(T) = 90T$ $m = 90$

$b = 0$

c) usa la gráfica para calcular la distancia de caracas pasadas las dos primeras horas de viaje.



$d(2) = 180$ Km.

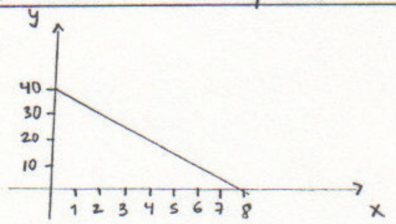
d) Utiliza la fórmula para calcular la distancia de caracas después de transcurrida una hora de salida la hora de viaje.

$d(t) = 90t$

$d(1) = 90 \cdot 1$

$d(1) = 90$ km

5) Redacta un problema.



Muy bien

Se sabe que a mayor altura menor es la presión atmosferica.

En la montaña ubicada a 8 km sobre el nivel del mar la presión es de 0 y al pie de la montaña, es decir, en el valle de la montaña (0km) la presión es de 40.

Las ordenadas representan la presión atmósférica y las abscisas la altura.

Esta gráfica es de pendiente negativa por lo explicado inicialmente; a medida que aumenta la altura la presión atmosferica disminuye.

¿Unidad de Medida de la presión atmosférica 1 ATMÓSFERA etc..

Alumna: Yackelin Castillo. 2º año M.D. ***INCAP Los Samanes***

Segunda fase de la investigación

19/20

Instituto de Capacitación Profesional "Los Samanes"
Matemática 2do Diversificado de Ciencias Sección: "A"
Nombre = Yackelin Castillo No Lista = 5
Fecha 29/04/2005

Prueba Nº 2 de Función Afín

1. Completa los espacios en blanco con la palabra correcta: Puntos "3"
Valor = 0,5 cada espacio. Total = 3 pts.

a) = La pendiente de una función afín es la = Inclinación de la recta.
b) = La segunda Coordenada del punto de intersección de una recta con el eje vertical de Coordenadas se llama = Ordenada en el origen
c) = Las rectas con igual pendiente son = paralelas.
d) = Las rectas $y = -5x+7$; $y = x - 1/5$ son = pendiente (paralelas o perpendiculares).
e) = Una recta es decreciente cuando su pendiente es negativa y es creciente cuando es positiva (positiva o negativa).

2. Resuelve los siguientes ejercicios en el espacio en blanco.
Valor = 1 punto cada ejercicio. Total 6 puntos.

a) = Sea $F(x) = -9x + 3$ ¿Cuál es la expresión algebraica (fórmula) de la recta paralela a $F(x)$ y que pasa por el origen de coordenadas ó punto (0,0)

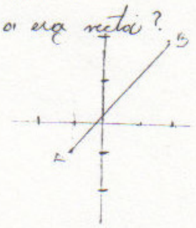
$y = mx + b$ | $y = -9x$ //
$m = -9$ | Fórmula
$b = 0$

b) = Si la pendiente de una recta es 1 (m=1) y la ordenada en el origen es 3 (b=3). Elabora la gráfica de la recta.

7 Gráficas altas $F(x) = x+3$ $(1) \Rightarrow 1+3=4$ $(0) \Rightarrow 0+3=3$
$(2) \Rightarrow 2+3=5$
$(3) \Rightarrow 3+3=6$

X	0	1	2	3
Y	3	4	5	6

c) = Dados los puntos A (-1,-1), B (2,2) y C (-1,2). Determina la función afín que pasa por los puntos A y B. ¿Pertenece C a esa recta? Explica la respuesta.

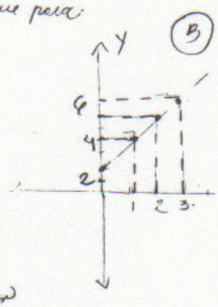


✓ $m = \frac{2-(-1)}{2-(1)} = \frac{2+1}{2+1} = \frac{3}{3} = 1$ $F(x) = mx+b$
$F(x) = x$

R = No, el punto "C" no pertenece a la recta de A y B por que no está en ella y su F(x) no es.

d) = Calcula la expresión algebraica (Formula) de la recta que pasa por el punto P(3,4) y es perpendicular a $g(x) = -3/2x$.

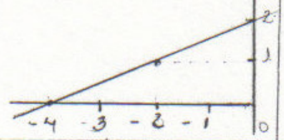
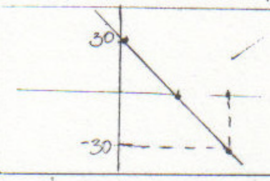
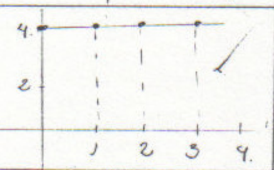
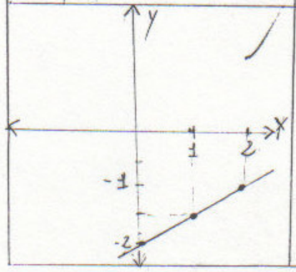
Fórmulas
$Y = mx+b \rightarrow g(x) = \frac{2}{3}x + b$
$4 = \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3} + b$
$4 - 2 = b \Rightarrow b = 2$



e) = Explica con tus palabras como resolviste el ejercicio anterior
- Lo leí bien y traté de comprender el problema
- Calculé la pendiente a partir de la recta que me dan
- Escribí la formula de la recta que me dan
- Luego empecé a sustituir en la ecuación anterior por el punto P. para así obtener el valor de B

3. Completa el siguiente cuadro.
Valor: 0,5 cada espacio. Total 4 pts.

La función afín puede representarse de diversas maneras. En el cuadro siguiente se tiene una de las representaciones (gráfica, tabla y fórmula) de cuatro funciones afines. Completar los espacios en blanco con la correspondiente representación de la misma función afín.

Gráfica	Tabla	Fórmula
	x: 0, -1, -2, -4 y: 2, $-\frac{3}{2}$, 1, 0	$F(x) = \frac{1}{2}x + 2$
	t: 0, 3, 6 e: 30, 0, -30	$F(x) = -10x + 30$
	x: 0, 1, 2, 3 y: 4, 4, 4, 4	$y = 4$
	x = 0, 1, 2 y: -2, $-\frac{3}{2}$, -1	$F(x) = \frac{1}{2}x - 2$

4. Resuelve el siguiente problema.
Valor: 3 pts.

Para ir de Caracas a Valencia (270 Km) elegimos como transporte un autobus que viaja a la misma velocidad durante todo el trayecto (90 Km/h). Sea $d(t)$ la distancia en Km que nos separa de Caracas en el instante t de nuestro viaje (t se mide en horas).. Si se sabe que $d(t)$ es una función afin con $d(0) = 0$ Km y $d(3) = 270$ Km.

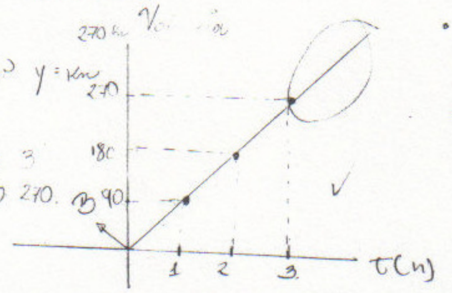
a)- Representa gráficamente la función $d(t)$.

270 Km

Ca Va

x = Tiempo y = Km

x	0	1	2	3
y	0	90	180	270



$d(0) - 0$ Km
$d(3) - 270$

• $3 - 270$
$1 \times X \rightarrow X = 90$ Km

• $3 - 270$
$2 - x \rightarrow = 180$ Km

b)- Determina los numeros m y b tales que $d(t) = mt + b$.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{270 - 180}{3 - 2} = \frac{90}{1} = 90 //$$

$m = 90 //$
$F(x) = 90x + B$
$F(2) = 90.(2) + B$
$180 = 180 + B$
$B = 180 - 180 = 0$
$B = 0 //$

La gráfica nos indica que "B" es = 0 por un punto de origen que (...

C)= Usa la gráfica para calcular la distancia de Caracas. pasados los dos primeras horas de viaje.

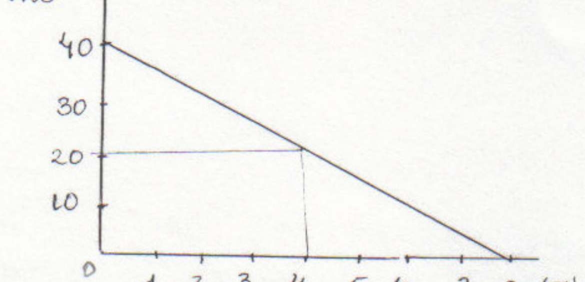
Al pasar la 1 hora de viaje el carro a recorrido 90 Km (ver gráf.
Al pasar las 2 hora de viaje el carro a recorrido 180 Km (ver gráf

d)= utiliza la fórmula para calcular la distancia de Caracas despues de transcurrida una hora de salida la hora de viaje.

$F(x) = 90x + 0 \rightarrow F(1) = 90_{1h} + 0 = F(1) = 90$ Km

5)= Redacta y Resuelve un problema
Valor 6 pts.

a)= Inventa el enunciado de un problema que corresponda a la representación gráfica que aparece abajo.
b)- Resuelve el problema que has inventado
c)- Explica las razones por las que piensas que tu enunciado corresponde a esa gráfica.



Problema =

una persona tiene que pasar por un camino de 40 km para llegar a casa. Esta persona viaja a una velocidad constante de 5km/h sea $d(t)$ la distancia en km que separa a una persona de su casa. Si el $d(0) = 40$ km y si $d(8) = 0$ km

a)= Representa la función gráficamente
b). Indica m y b de la función
c): Calcula la fórmula de la función afín

a= x = tiempo
   y = distancia

0h —— 40 km.
8h —— 0km

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	40	35	30	25	20	15	10	5	0

B: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{30 - 40}{2 - 0} = \frac{-10}{2} = -5$

(B) Lo indica la gráfica es 40.

c): La función será.
$F(x) = mx + B$.
$F(x) = -5x + 40$.

comprobación.
$F(0) = -5(0) + 40 = 40$
$F(1) = -5(1) + 40$
$F(1) = -5 + 40 = 35$

$F(3) = -5(3) + 40 = -15 + 40 = 25$
$F(4) = -5(4) + 40 = -20 + 40 = 20$
$F(5) = -5(5) + 40 = 15$
$F(6) = -5(6) + 40 = 10$.
$F(7) = -5(7) + 40 = 5$
$F(8) = -5(8) + 40 = 0$

Parte C-
Los datos son iguales a los resultados de la tabla y también de la gráfica, por lo siguiente la gráfica anterior es la representación de los datos y resultados del problema.